DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

KAYNAKLAR :

1°) Elemantary Differential Geometry (Barret O'Neill)

2°) Diferensiyel Geometri (H. Hilmi Hacısalihoğlu - Ank. Ünv.)

3°) Diferansiyel Geometri (H. Hilmi Hacısalihoğlu - Arif Sabuncuoğlu - M.E.B)

4°) Elements of Differential Geometry (R.S. Millman - G.D. Parker)

5°) Differential Geometry of Curves and Surfaces
(Eğri ve Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi) Manfedo P. do Carmo

KONULAR (İçerik):

I - Temel Kavramlar :

Afin Uzay, Euclid Uzayı, Metrik Uzay, Topolojik Uzay

II - Tanjant Vektörler, Tanjant Uzaylar, Yöne Göre Türevler, Vektör Alanları, Kovaryant Türevler, Dönüşümler (Euclid Uzaylarındaki Dönüşümler), Özellikler.

III - Eğriler Teorisi, (Euclid Uzayındaki), Özel Eğriler : Eğilim Çizgileri, Bertand Eğrileri, İnvolüt Eğrileri, Evolüt Eğrileri, ...

5.10.1995
Perşembe

Geometri : Dönüşümler altındaki değişmezlerin teorisidir.
(invaryantların)

Dönüşüm + Değişmezler = Geometri

Diferansiyel Geometri : Diferansiyel (türev) dönüşümü altındaki değişmezlerin teorisidir.

Temel Kavramlar :

Tanım : (Afin Uzay) : Boş olmayan bir A kümesi (uzayı), n-boyutlu bir reel vektör uzayı V verilsin.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisimdir. Buna reel sayılar cismi denir.

$(V, \oplus)$ = bir abel grubudur.

$[V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot]$ $\quad \odot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, $(a, \alpha) \longrightarrow a \odot \alpha$

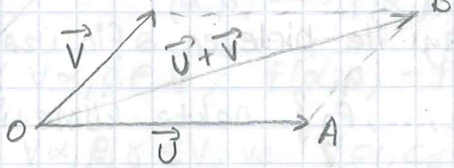
Bir f fonksiyonu, $f : A \times A \longrightarrow V$, $\forall P, Q \in A$ için
$(P, Q) \longrightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$

tanımlansın. Eğer ;

1°) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P,R) = f(P,Q) + f(Q,R)$

2°) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için, $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. (afin uzayın aksiyomları)

özellikleri sağlanıyorsa A kümesine V ile birleşmiş bir **afin uzay** denir.

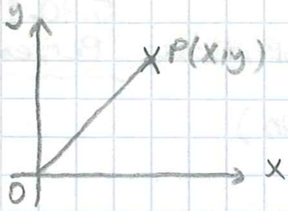


$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$: P başlangıç, Q uç noktasıdır.

Örnek // $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. (Vektörlerin toplamı ve çarpımı işlemine göre bir vektör uzayıdır.)

A kümesi düzlemdeki noktaların kümesi olsun.



$\overrightarrow{OP} = (x,y)$

$f: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = (a,b)$ afin uzaydır.

Örnek // $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ vektörler kümesi

$A = \{P : P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \wedge P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{R}\}$ noktaların bileşenleri

A kümesi noktayı başlangıca birleştiren vektörlerin kümesidir.

$f: A \times A \longrightarrow V = \mathbb{R}^n$

$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = Q - P = (q_1, q_2, \dots, q_n) - (P_1, P_2, \dots, P_n)$
$= (q_1 - P_1, q_2 - P_2, \dots, q_n - P_n)$

1°) $\forall P, Q, R \in A$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$

$f(P,Q) = Q - P = (q_1 - P_1, q_2 - P_2, \dots, q_n - P_n)$

$f(Q,R) = R - Q = (r_1 - q_1, r_2 - q_2, \dots, r_n - q_n)$

$+$

$f(P,Q) + f(Q,R) = R - P = (r_1 - P_1, r_2 - P_2, \dots, r_n - P_n) = f(P,R)$ (*)

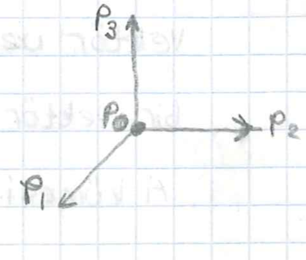
2°) $\forall P \in A \Rightarrow P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f(P,Q) = \alpha \Rightarrow Q - P = \alpha \Rightarrow Q = P + \alpha$

$\Rightarrow Q = (P_1 + x_1, P_2 + x_2, \dots, P_n + x_n) \in A$ tektir.

O halde A kümesi bir afin uzaydır.

Tanım : (afin çatı) : Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. A afin uzayında $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta kümesi verilsin. $\alpha_i = f(P_0, P_i) = \overrightarrow{P_0 P_i}$, $1 \le i \le n$ olmak üzere, eğer ; $\{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ kümesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta kümesine A'da bir afin çatı denir.



P_0 : Çatının başlangıç noktasıdır.

P_i : " i-inci birim noktasıdır. $(i = 1, 2, \dots, n)$

Örnek // $f: A\times A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall P\in A$, $P=(P_1,P_2)$
$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = Q-P$

$P_0=(1,1)$, $P_1=(0,-1)$, $P_2=(-1,2)$ olmak üzere ;

$\{P_0,P_1,P_2\}$ nokta kümesinin A nın bir afin çatısı olduğunu gösterelim. $A=\mathbb{R}^2$

$f(P_0,P_1)=\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{\alpha}_1$, $f(P_0,P_2)=\vec{\alpha}_2$

$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ nin $\mathbb{R}^2$ de bir baz olduğunu göstermeliyiz.

$\vec{\alpha}_1 = f(P_0,P_1) = P_1-P_0 = (0,-1)-(1,1) = (-1,-2)$

$\alpha_2 = f(P_0,P_2) = P_2-P_0 = (-1,2)-(1,1) = (-2,1)$

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ alalım.

$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2\vec{\alpha}_2=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1(-1,-2)+\lambda_2(-2,1)=(0,0)$

$\Rightarrow (-\lambda_1-2\lambda_2, -2\lambda_1+\lambda_2)=(0,0)$

$-\lambda_1-2\lambda_2=0$
$-2\lambda_1+\lambda_2=0$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4=-5\neq 0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ tek çözüm vardır. O da sıfır çözüm olur.

$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$ lineer bağımsızdır. Bazdır. (tabandır.)

$\{P_0,P_1,P_2\}$, $\mathbb{R}^2=A$ nın bir bazıdır.

Tanım : (öklid Uzayı): Bir reel afin uzayı ile birleşen n boyutlu vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım $\langle , \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

İç çarpım : $f: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\alpha,\beta) \longrightarrow f(\alpha,\beta)$

i- $\forall \alpha,\beta\in V$, $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$ (simetri özelliği)

ii- $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$, ve $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$,

$f(c_1\alpha+c_2\beta,\gamma)=c_1f(\alpha,\gamma)+c_2f(\beta,\gamma)$

ve $f(\alpha,c_1\beta+c_2\gamma)=c_1f(\alpha,\beta)+c_2f(\alpha,\gamma)$

$\Rightarrow f$ bilineer. (2-lineerdir.) olur.

{ $f: V \longrightarrow W$
$\alpha \longrightarrow f(\alpha)$
$c_1,c_2\in\mathbb{R}$ $\alpha,\beta\in V$,
$f(c_1\alpha+c_2\beta)=c_1f(\alpha)+c_2f(\beta)$
$\Rightarrow f$ lineerdir. }

iii- Pozitif tanımlılık özelliği ; $\forall\alpha\in V$, $f(\alpha,\alpha)\geq 0$ ve

$f(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

özellikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonuna V vektör uzayında bir iç çarpım denir. V vektör uzayına da iç çarpım uzayı denir.

Bir vektör uzayında vektör uzayı tanımlanırsa, bu uzaya iç çarpım uzayı denir.

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \longrightarrow \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

(Ödev : $\langle , \rangle$ iç çarpımdır ?)

i- $\langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle Y,X \rangle$ (simetri özelliği)

Bu iç çarpıma <u>öklid iç çarpımı</u> denir.

Afin uzaya da <u>öklid uzayı</u> denir.

{ $\langle X,Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \Rightarrow$ öklid iç çarpımı }

$A=\mathbb{R}^n$, $V=\mathbb{R}^n$ alırız. $A=E^n$: n-boyutlu reel öklid uzayı.

Afin uzayın boyutu : $\operatorname{Boy}A = \operatorname{Boy}V$ → vektörler kümesi
↓ noktalar kümesi

⇓ birleştiği vektör uzayının boyutuna denir.

Tanım : (Uzaklık) : $d : E^n \times E^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan $d(x,y)$ reel sayısına $x,y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

$$X=(x_i)=(x_1,x_2,\dots,x_n), \quad y=(y_i)=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

Teorem : E^n deki uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} \geq 0$ dır. //

2- $d(x,y)=0 \iff x=y$,

$d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=0 \iff \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2=0 \iff (y_i-x_i)=0$

$\iff y_i=x_i \quad \forall i$ için,

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)=(y_1,y_2,\dots,y_n)=y \iff X=y$ dır. //

$d(x,y)=0 \iff x=y$ //

3- $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[-(x_i-y_i)\right]^2}$

Simetri özelliği. $\quad =\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=d(y,x)$

4- $\forall x,y,z \in E^n$, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,z)=\|\vec{XZ}\|=\|\vec{XY}+\vec{YZ}\|$ (1. afin aksiyomundan)

$\leq \|\vec{XY}\|+\|\vec{YZ}\|$ (Schwartz eşitsizliği)

$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

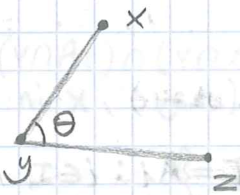
E^n de tanımlanan d uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Bu metriğe öklid metriği denir.

Tanım: (açı): α,β vektörler ise $\langle\alpha,\beta\rangle=\|\alpha\|.\|\beta\|.\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|.\|\beta\|}$

$x,y,z \in E^n$ olsun.



$\widehat{xyz}$ ölçüsü ;

$\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{xy},\vec{yz}\rangle}{\|\vec{xy}\|.\|\vec{yz}\|}$ bağıntısıyla tanımlanan θ sayısıdır.

Tanım: (öklid çatısı): E^n deki $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ $n+1$ -lisine karşılık gelen $\mathbb{R}^n$ (vektör uzayındaki) deki $\{\vec{P_0P_1},\vec{P_0P_2},\ldots,\vec{P_0P_n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazı ise bu $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ kümesine dik çatı veya öklid çatısı denir.

P_0: başlangıç noktası $\quad P_i$: i.-inci birim nokta.

Örnek // E^n de, $E_0=(0,0,\ldots,0)$, $E_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $E_2=(0,1,0,\ldots,0)$ ... $E_n=(0,0,\ldots,1)$ noktaları veriliyor. Buna göre

$\vec{E_0E_1}=(1,0,\ldots,0)$, $\vec{E_0E_2}=(0,1,0,\ldots,0)$,..., $\vec{E_0E_n}=(0,0,\ldots,1)$

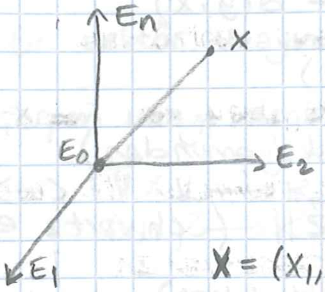
$\{\vec{E_0E_1},\vec{E_0E_2},\ldots,\vec{E_0E_n}\}$ $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazıdır.

$\langle\vec{E_0E_i},\vec{E_0E_j}\rangle=\delta_{ij}$ ortonormaldir.

$\Rightarrow \{E_0,E_1,\ldots,E_n\}$ bir öklid çatısıdır.

Tanım: Bu çatıya standart öklid çatısı denir.

Tanım : (Öklid koordinat sistemi): E^n de $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ çatısı ve bir X noktası verilsin. $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \dots, \overrightarrow{E_0E_n}\}$ V.U nın bazıdır.



$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılır. { V.U nın gereken vektör sayısıdır.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \overrightarrow{E_0E_1} + x_2 \overrightarrow{E_0E_2} + \dots + x_n \overrightarrow{E_0E_n}$

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$
$$X \longrightarrow x_i(X) = x_i$$
$$P \longrightarrow x_i(P) = p_i$$

fonksiyonuna i-inci öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$x_1 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Q \longrightarrow x_1(Q) = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_1$$ öklid koordinat fonksiyonu denir.

Topoloji : $X \neq \emptyset$ bir küme (uzay), X in alt kümelerinin bir ailesi (koleksiyonu) τ olsun. $\tau = \{A_i : i \in I \wedge A_i \subseteq X\}$

1- $\emptyset, X \in \tau$

2- $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

3- $A_i \in \tau,\ i \in I,\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

önermeleri doğru ise τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir.

Örnek // $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$

afin uzayında $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ metriği yardımıyla

$\{y : y \in E^n \wedge d(x,y) < \varepsilon_i \wedge \varepsilon_i \in \mathbb{R}\} = B(X, \varepsilon_i)$ tanımlanıyor.

$\tau = \{B(X, \varepsilon_i) : X \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de bir topolojidir.

1°) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \tau$?

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_i = 0 \Rightarrow d(x,y) < 0 \Rightarrow \emptyset \in \tau \\ \varepsilon_i \to \infty \Rightarrow \mathbb{R}^n \in \tau \end{array}\right\} \emptyset, \mathbb{R}^n \in \tau \ //$$

2°) ve 3°) de sağlanır.

Sonuç olarak; τ, $\mathbb{R}^n$ de bir topolojidir. ($\mathbb{R}^n$ deki metrik topolojidir.)

Topolojik uzay: X bir küme, $\mathcal{T}$ de X üzerinde bir topoloji olsun. $(X \neq \phi)$
$(X,\mathcal{T})$ ikilisine bir topolojik uzay denir.

$(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı yerine; X topolojik uzayı denilebilir.

Relatif (bünyesel) topoloji: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\forall A_i \in \mathcal{T}$ için, $A_i \cap Y$ kümeleri de açık kümelerdir. (kabul)

$\mathcal{T}_1 = \{Y_i : Y_i = Y \cap A_i \wedge A_i \in \mathcal{T}\}$ olarak tanımlanan $\mathcal{T}_1$ ailesi Y'de bir topoloji tanımlar. $(Y,\mathcal{T}_1)$ de bir topolojik uzaydır. $\mathcal{T}_1$'e X'den indirgenmiş relatif topoloji denir.

$\mathcal{T}_1 = \{Y_i : Y_i = Y \cap A_i \wedge A_i \in \mathcal{T}\}$

1°) $A_i = \phi \in \mathcal{T} \Rightarrow Y \cap \phi = \phi = Y_i \in \mathcal{T}_1$

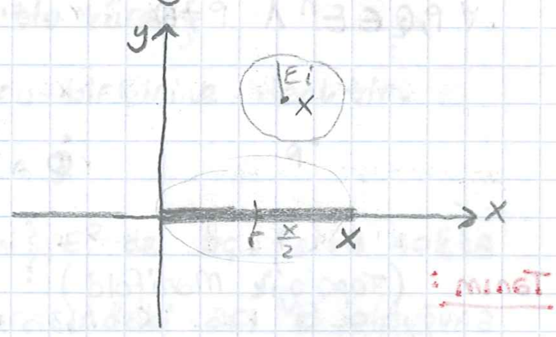
$Y \in \mathcal{T} \Rightarrow Y \cap Y = Y \in \mathcal{T}_1$

2°) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}_1, \quad Y_1 \cap Y_2 = (Y \cap A_1) \cap (Y \cap A_2) = Y \cap \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{T}_1} \in \mathcal{T}_1$

3°) $\bigcup_{i \in I} (Y \cap A_i) \in \mathcal{T}_1$

$\mathcal{T}_1$'e, Y de indirgenmiş bünyesel topoloji denir.

Örnek// E^2 de (2-boyutlu öklid uzayı) d metriği ile verilen metrik topolojiyi düşünelim.



$\mathcal{T} = \{B(x, \varepsilon_i) : x \in E^2 \wedge \varepsilon_i \in \mathbb{R}\}$

$L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset E^2$

$\mathcal{T}_1 = \{Y_i : B(x,\varepsilon_i) \cap L = Y_i\}$

1°) $\phi \in \mathcal{T}_1$, $Y \in \mathcal{T}_1$

2°) $Y_1 = L \cap B(x, r_1) \quad Y_2 = L \cap B(x, r_2)$

$Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow$ açıktır.

3°) birleşimleri de açıktır.

O halde $\mathcal{T}_1$ E^2 den indirgenmiş bünyesel topolojidir.

Tanım: Homeomorfizm (Topolojik dönüşüm):

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olsun.

Bir $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu :

1°) f, 1:1 $\quad 2^\circ$) f, örten $\quad 3^\circ$) f, sürekli $\quad 4^\circ$) f^{-1}, sürekli

ise f'ye X den Y'ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) veya eşyapı dönüşümü denir.

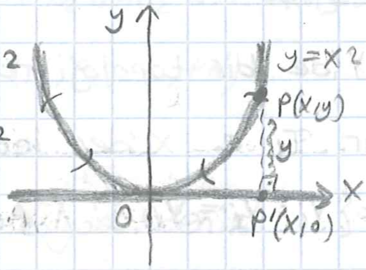
X ve Y uzaylarına homeomorfiktirler (topolojik olarak denktirler) denir.

Örnek// $X = \{(x,y) : (x,y) \in E^2 \wedge y = x^2\} \subset E^2$

$Y = \{(x,0) : (x,0) \in E^2 \wedge x \in \mathbb{R}\} \subset E^2$

$f: X \longrightarrow Y$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x,0)$



Tanım: (Hausdorff Uzayı) :

X bir topolojik uzay olsun. $\forall P, Q \in X$ ve $P \neq Q$ olmak üzere $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde P'nin bir A_P, ve Q nun bir A_Q civarı (komşuluğu) varsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir.

Örnek// E^n bir Hausdorff uzayıdır. (E^n, d) bir topolojik uzaydır.

$\forall P, Q \in E^n \wedge P \neq Q$

$A_P = \{y : d(P,y) < d(P,Q)\}$

$\cdot P \qquad \dot{Q}$

$A_Q = \{z : d(Q,z) < d(P,Q)\}$

$A_P \cap A_Q = \emptyset$ //

Tanım: (Topolojik Manifold) :

M bir topolojik uzay olsun.

M_1) M bir Hausdorff uzayıdır.

M_2) M nin sayılabilir çoklukta açık kümelerden oluşan bir açık örtüsü vardır. (A küme, $\mathcal{A}$ kümeler ailesi ve $A \subseteq \cup \mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ ailesi A nın bir örtüsüdür.) $(\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\})$

M_3) M'nin herbir açık alt kümesi E^n'e veya E^n in bir açık alt kümesine homeomorftur, $\left(\psi : U_i \in M \xrightarrow[\text{homeomorfizm}]{} V_i \in E^n\right)$

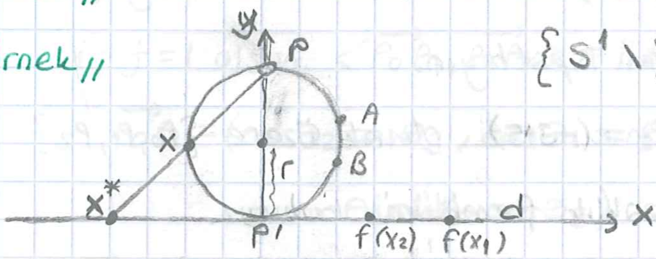
önermeleri doğru ise, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

1-örnek// E^n in kendisi bir topolojik manifolddur.

E^n, tanımdan topolojidir, Hausdorff uzayıdır ve örtüsü açık kümelerden oluşur, ve homemorftur.

2.örnek// E^n in herbir açık alt kümesi bir topolojik manifolddur.

3.örnek// $\{S^1 \setminus \{P\}, \tau\}$ bir topolojik uzaydır.



1°) Çember üzerindeki açık yayları (örneğin $\widehat{AB}$ yayı) alırsak; Hausdorff uzayıdır.

2°) $\mathcal{B} = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ sayılabilirdir.

3°) $f: S^1 \setminus \{P\} \longrightarrow E^1$

$X \longrightarrow f(X) = X^*$

$f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$ f, 1:1 dir. , f örtendir.

$\forall X^* \in E \Rightarrow f(X) = X^*$, $X \in S^1 \setminus \{P\}$ (Ödev): f^{-1} vardır.

Boy $(S^1 \setminus \{P\}) = 1$ $\{S^1$: 1 boyutlu küre.$\}$

Topolojik açıdan, çember ile doğru birbirine denktir.

Problemler:

1 - 2-boyutlu öklid uzayı (öklid düzlemi), E^2 de üç farklı nokta X, Y, Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ve $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki açı θ olduğuna göre; $d^2(Y,Z) = d^2(Y,X) + d^2(X,Z) - 2\,d(XY)\,d(X,Z)\cos\theta$ olduğunu ispat edin.

2 - $a, b, c, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, E^3 de ; $P_0 = (a,b,c)$,

$P_1 = (a + \cos\theta_2\cos\theta_3 \,,\, b + \cos\theta_1\sin\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \,,$
$c + \sin\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3)$

$P_2 = (a - \cos\theta_2\sin\theta_3 \,,\, b + \cos\theta_1\sin\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \,,$
$c + \sin\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)$

$P_3 = (a+\sin\theta_2, b-\sin\theta_1\cos\theta_2, c+\cos\theta_1\cos\theta_2)$

noktaları veriliyor. $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ kümesinin E^3 de bir öklid çatısı olduğunu ispat edin.

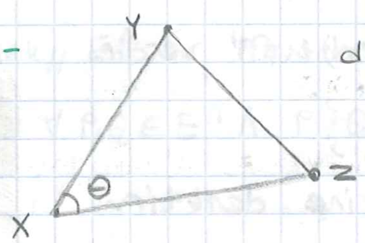
3- E^n de bir öklid koordinat sistemine göre; $A, B \in E^n$ noktaları $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ koordinatları ile veriliyor. $d(A,B) = \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2\right]^{1/2}$ olduğunu ispatlayın.

4- E^2 de $P_0=(1,1)$, $P_1=(2,2)$, $P_2=(-3,5)$ olmak üzere $\{P_0, P_1, P_2\}$ çatısı veriliyor. Bu çatıya göre uzaklık formülünü bulunuz.

5- E^n standart (reel) öklid uzayında $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ $1 \leq k \leq n$ noktaları veriliyor. Öyle bir $X \in E^n$ noktası bulunuz ki,

$f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$,
$X \longrightarrow f(X) = \sum_{k=1}^{n} [d(X, A_k)]^2$ fonksiyonu mümkün olan en büyük değeri alsın.

Çözümler

1- 

$d^2(Y,Z) = \|\overrightarrow{YZ}\|^2 = \langle \overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YZ} \rangle$

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ}$ (1. afin öz.) $f(P,R) = \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$ 'den

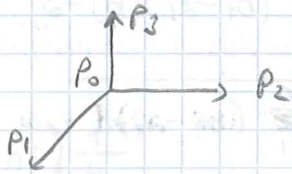
$\Rightarrow \overrightarrow{YZ} = -\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}$

$$d^2(Y,Z) = \langle \overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YZ} \rangle = \langle \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \langle \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle \overrightarrow{XZ}, -\overrightarrow{XY} \rangle + \langle -\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle -\overrightarrow{XY}, -\overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \langle \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle - 2\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle$$
$$= d^2(X,Y) + d^2(X,Z) - 2\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \cdot \|\overrightarrow{XZ}\|} \Rightarrow \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle = \|\overrightarrow{XY}\| \cdot \|\overrightarrow{XZ}\| \cdot \cos\theta$$
$$= d(X,Y) \cdot d(X,Z) \cdot \cos\theta$$

$$d^2(Y,Z) = d^2(X,Y) + d^2(X,Z) - 2d(X,Y) \cdot d(X,Z) \cos\theta \quad //$$

2- $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ E^3 de öklid çatısıdır. Eğer $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ kümesi E^3 ün öklid çatısıdır.



$$\langle P_0P_i, P_0P_j \rangle \overset{?}{=} \delta_{ij}$$

$i, j = 1, 2, 3$

$i = j = 1$ olsun. $\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 \overset{?}{=} 1$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (\cos\theta_2\cos\theta_3, \cos\theta_1\sin\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \sin\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3)$$

$$\|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 = (\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2\cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_3 - 2\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_3 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3)$$

$$= \cos^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_2\cos^2\theta_3$$

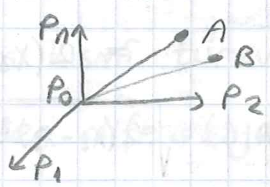
$$= \cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 = 1 \quad //$$

$\|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 = \|\overrightarrow{P_0P_3}\|^2 = 1$

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = 0$

$\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ $\mathbb{R}^3$ ün bir ortonormal bazı, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ öklid çatısıdır.

3- $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ öklid çatısı veriliyor.



$\overrightarrow{P_0A} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_0P_i \qquad A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

sayılarına A noktasının koordinatları denir.

$\overrightarrow{P_0A} = a_0\overrightarrow{P_0P_1} + a_1\overrightarrow{P_0P_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$ şeklinde yazılır.

$\overrightarrow{P_0B} = \sum_{i=1}^{n} b_i P_0P_i \qquad B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{P_0B} = \overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A}$

$= \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A}$

$= \sum_{i=1}^{n} b_i P_0P_i - \sum_{i=1}^{n} a_i P_0P_i \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = (\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle)^{1/2}$

$\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) P_0P_i$

$$d(A, B) = \left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) P_0P_i, \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) P_0P_j \right\rangle\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (b_i-a_i)(b_j-a_j)\langle P_0P_i, P_0P_j\rangle}$$

{ $i=j$ olmalı
$i\neq j$ ise 0 olur.
sıfırları katmayız

$$= \sqrt{\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} (b_i-a_i)(b_j-a_j)\,\delta_{ij}}$$

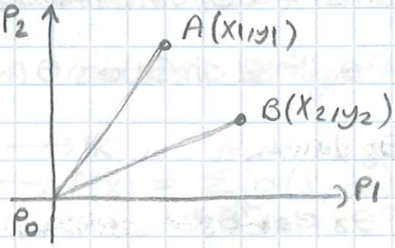
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i)^2} \quad \text{(Euclid uzaklık formülü)}$$

4- $P_0=(1,1)$ $P_1=(2,2)$ $P_2=(-3,5)$

$\overrightarrow{P_0P_1}=(1,1)$ $\overrightarrow{P_0P_2}=(-4,4)$

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\rangle = -4+4=0$ ortogonal fakat birim değildir.

$\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{2} \neq 1$ olduğundan ortonormal çatı değildir.



$\overrightarrow{P_0A} = x_1\overrightarrow{P_0P_1} + y_1\overrightarrow{P_0P_2} = (x_1, x_2)$

$\overrightarrow{P_0B} = x_2\overrightarrow{P_0P_1} + y_2\overrightarrow{P_0P_2}$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A} = (x_2-x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2-y_1)\overrightarrow{P_0P_2}$

$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle = \langle (x_2-x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2-y_1)\overrightarrow{P_0P_2}, (x_2-x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2-y_1)\overrightarrow{P_0P_2}\rangle$

$= (x_2-x_1)^2\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1}\rangle + 0 + 0 + (y_2-y_1)^2\langle P_0P_2, P_0P_2\rangle$

$= 2(x_2-x_1)^2 + 32(y_2-y_1)^2$

$d(A,B) = \sqrt{2(x_2-x_1)^2 + 32(y_2-y_1)^2}$ (öklid uzaklığı değildir.)

5- $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$, $1 \leq k \leq n$ $\quad X \in E^n$ için,

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatlardır.

$f: E^n \to \mathbb{R}$, $f(X) = \sum_{j=1}^{k} d^2(X, A_j) = d^2(X, A_1) + d^2(X, A_2) + \ldots + d^2(X, A_k)$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$.

$d^2(X, A_k) = \|X, A_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} - x_i)^2$

$f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}-x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_{i2}-x_i)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n}(a_{ik}-x_i)^2$

$f_{x_1} = 0 \Rightarrow -2(a_{11}-x_1) + 2(a_{12}-x_2) + \ldots + 2(a_{1k}-x_1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f_{x_2}=0 \\ \vdots \\ f_{x_n}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = \dfrac{a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1k}}{k}$

$f(x_2)=0 \Rightarrow -2(a_{21}-x_2)+2(a_{22}-x_2)+\dots+2(a_{2k}-x_2)=0$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2k}}{k}$

$f(x_n)=0 \Rightarrow x_n = \dfrac{a_{n1}+a_{n2}+\dots+a_{nk}}{k}$

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{k} a_{1i},\ \sum_{i=1}^{k} a_{2i},\dots,\ \sum_{i=1}^{k} a_{ni}\right)\frac{1}{k}$$

$$A=(f_{x_ix_j})_{n\times n}=\begin{array}{cccc} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2k \end{pmatrix}$$

$P(\lambda)$, A nın karakteristik polinomu olmak üzere,

1° Tüm karakteristik değerler; (A matrisinin) >0 ise minimum,

2° <0 ise maksimum,

3° $=0$ ise birşey söylenemez, (şüpheli durum.)

4° $(-)$ ve $(+)$ olanı varsa bu noktada ekstremum yoktur.

1. Tanım: (Diferansiyellenebilir Fonksiyon):

E^n de bir açık küme U olmak üzere bir;

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$
$X \longrightarrow f(X)$ reel değerli fonksiyonu verilsin. $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olduğundan $f(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olur.

f nin k-ıncı mertebeye kadar (k dahil) tüm kısmî türevleri sürekli ise f fonksiyonu k-ıncı mertebeden diferansiyellenebilir denir. (Veya kısaca, "f fonksiyonu C^k sınıfındandır" denir.)

Örnek // $f: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow f(x,y)=xy$ $\quad C^k,\ \forall k\in\mathbb{N}$.

(tüm mertebelerden türevlenebilir, diferansiyellenebilir.)

$C^k(U,\mathbb{R})=\{f : f: U \xrightarrow[\text{bilir}]{\text{dif.}} \mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}\}$ kümesini tanımlayalım.

$\Rightarrow f\in C^k(U,\mathbb{R})$

2. Tanım: Özel olarak U üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu sadece sürekli ise "C^0 sınıfındandır" denir. $\Rightarrow f\in C^0(U,\mathbb{R})$

3. Tanım: $f\in C^1(U,\mathbb{R})$ (f fonksiyonu ve 1. mertebeden kısmî türevleri var ve sürekli ise) f'ye bir 0-form denir.

4. Tanım: Tüm mertebeden türevlenebilen bir fonksiyona "C^∞ sınıfındandır" denir. $C^\infty(U,\mathbb{R}) = \{ f : f \in C^k(U,\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N} \}$

Koordinat Fonksiyonları

E^n de bir nokta P ise $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in E^n$ olsun.

Bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinat sistemi seçersek;

$$x_1 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_1(P) = x_1(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_1$$

$$\{ Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \Rightarrow x_1(Q) = q_1 \}$$

x_1'e E^n de 1-inci koordinat fonksiyonu denir.

$$x_2 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_2(P) = x_2(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_2$$

x_2'ye E^n de 2-nci koordinat fonksiyonu denir.

Benzer şekilde;

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_i(P) = x_i$$

x_i'ye E^n de i-inci koordinat fonksiyonu denir.

Eğer x_i koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri varsa (k-inci mertebeye kadar) $x_i \in C^k(E^n, \mathbb{R})$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{(ya 1 veya sıfırdır.)}$$

Fonksiyonların Diferansiyellenebilmesi

$U \subset E^n$ bir açık küme olsun. U da bir fonksiyon,

$$F : U \longrightarrow E^m \qquad P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$$
$$P \longrightarrow F(P) = Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$$
$$\downarrow$$
$$F(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$$

$f_1 : P \longrightarrow f_1(P) = q_1$
$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$
$f_2 : P \longrightarrow f_2(P) = q_2$ - - - - - - - - -

$f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$
$P \longrightarrow f_m(P) = q_m$

$(q \in \mathbb{R})$

Tanım: Tüm $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f_i(P)$ koordinat fonksiyonları, C^k sınıfından ise $[f_i \in C^k(U,\mathbb{R})]$ F'ye C^k sınıfındandır denir.

$F \in C^k(U, E^m)$ şeklinde gösterilir.

Örnek // $F : E^3 \longrightarrow E^3$

$P=(x,y,z) \longrightarrow F(P) = F(x,y,z) = (x^2, yz, xy) = (f_1(P), f_2(P), f_3(P))$

$Q=(q_1,q_2,q_3)$

$F(Q) = (q_1^2, q_2 \cdot q_3, q_1 \cdot q_2)$

$f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(E^3, E^3)$

$f_1(P) = f_1(x,y,z) = x^2$

$f_2(P) = f_2(x,y,z) = yz$

$f_3(P) = f_3(x,y,z) = xy$

$P=(1,-2,0) \Rightarrow F(P) = (1^2, (-2).0, 1.(-2)) = (1,0,-2)$

$Q=(-3,1,3) \Rightarrow F(Q) = ((-3)^2, 1.3, (-3).1) = (9,3,-3)$

Örnek // $\Psi : E^2 \longrightarrow E^3$

$(u,v) \longrightarrow \Psi(u,v) = (u^2-v^2, 2uv, v^3)$

$\Psi(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$

$f_1(u,v) = u^2-v^2$, $f_2(u,v) = 2uv$, $f_3(u,v) = v^3$

$f_i : E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(E^2, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \Psi \in C^\infty(E^2, E^3)$

Tanım: (Diffeomorfizm):

E^n de iki açık küme U ve V olsun. $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu verilsin.

1- $\Psi \in C^k(U,V)$,

2- $\Psi^{-1} \in C^k(V,U)$ ise Ψ fonksiyonu, U ile V arasında bir diffeomorfizm'dir denir. U ile V açık kümeleri diffeomorfiktirler denir.

Örnek // $\Psi : E^2 \longrightarrow E^2$, $X=(x_1,x_2) \longrightarrow \Psi(X)$, $\Psi(x_1,x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2)$

Ψ nin bir diffeomorfizm olduğunu gösterelim.

1°) $f_1(x_1,x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2)$, $f_2(x_1,x_2) = (x_1 e^{x_2} - x_2)$

$\Rightarrow f_1, f_2 \in C^\infty(E^2, \mathbb{R}) \Rightarrow \Psi \in C^\infty(E^2, E^2)$ dir.

2^o). ψ, 1:1 dir. $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in E^2$,

$$\psi(\underbrace{x_1,x_2}_{x}) = \psi(\underbrace{y_1,y_2}_{y}) \Rightarrow (x_1e^{x_2}+x_2, x_1e^{x_2}-x_2) = (y_1e^{y_2}+y_2, y_1e^{y_2}-y_2)$$

$\Rightarrow x_1e^{x_2}+x_2 = y_1e^{y_2}+y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y_2$ (toplarsak)

$\Rightarrow 2x_2 = 2y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y_2$

$\Rightarrow x_2 = y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y^2$

$\Rightarrow x_2 = y_2 \wedge x_1 = y_1 \Rightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ //

ψ örtendir. $\forall (y_1,y_2)\in E^2$, $\psi(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ olan $(x_1,x_2)\in E^2$ var mıdır. Bakalım.

$\Rightarrow (x_1e^{x_2}+x_2, x_1e^{x_2}-x_2) = (y_1,y_2) = \psi(x_1,x_2)$

$\Rightarrow (x_1,x_2) = \psi^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{y_2+y_1}{2}e^{\frac{y_2-y_1}{2}}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$ //

$\psi^{-1}\in C^\infty(E^2,E^2)$ (ve C^∞ sınıfından türevlenebilir.)

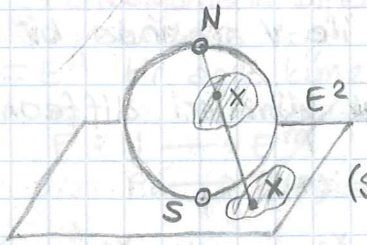
Sonuç: $\psi: E^2 \longrightarrow E^2$ fonksiyonu C^∞ sınıfından bir diffeomorfizmdir.

Tanım: (Harita = Koordinat Komşuluğu):

M bir n-boyutlu topolojik manifold olsun. M nin açık kümelerinden birisi W ve W'yı E^n deki bir açığa eşleyen homeomorfizm ψ olsun.

$$\psi: U\subset E^n \xrightarrow[\text{homeomorfizm}]{} W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine, M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.



(Stereografik izdüşüm)

Tanım: (Atlas = Koordinat Komşuluğu Sistemi):

M, n-boyutlu topolojik manifold olsun. M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\} = \{U_\alpha : \alpha\in I\}$, (I indis kümesi.) veriliyor.

U_α'yı E^n deki bir açığa karşılık getiren homeomorfizm

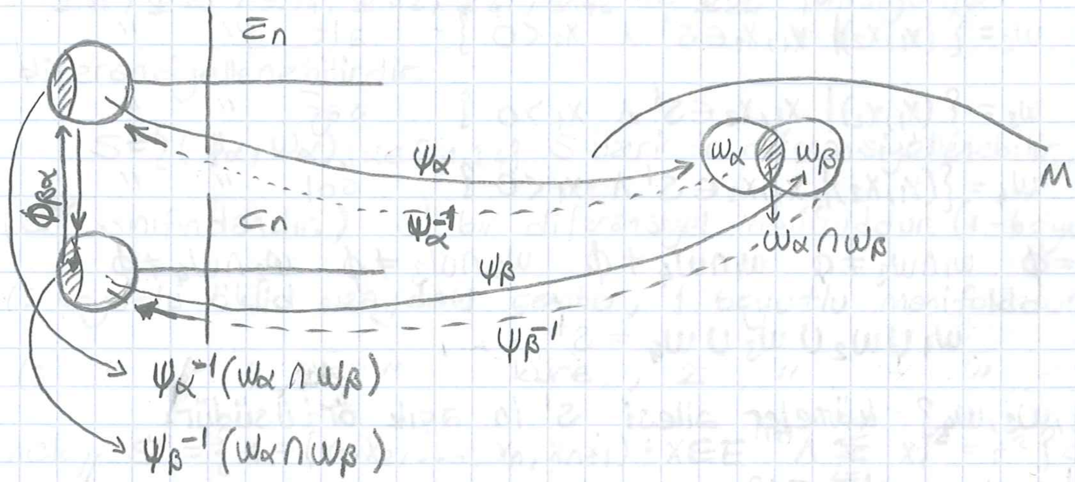
ψ_α olsun. (ψ_α, U_α) haritalarının, $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\} = \{(\psi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümeler ailesine M nin bir atlası denir.

20.10.95/CUMA

Diferansiyellenebilir Manifold

M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun.

(ψ_α, W_α) ve (ψ_β, W_β) ikililerini alalım. $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$



$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha \ , \quad \phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

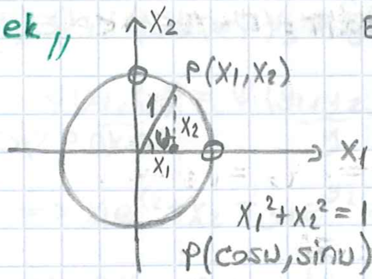
Tanım : (Diferansiyellenebilir Yapı) :

M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun. M'nin bir atlası, $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer bu S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in I$ için elde edilen $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferansiyellenebilir iseler S'ye C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. Bu taktirde S atlasına da, M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı denir.

Tanım : (Diferansiyellenebilir Manifold) :

Üzerinde bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanan n-boyutlu topolojik manifolda, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold denir.

Örnek // E^2 de S^1 merkezi başlangıç noktasında olan birim çember olsun.



$W_1=\{(X_1,X_2) \mid X_1,X_2\in S^1 \wedge X_2>0\}$ üst yarım çember.

$W_2=\{(X_1,X_2) \mid X_1,X_2\in S^1 \wedge X_2<0\}$ alt " "

$W_3=\{(X_1,X_2) \mid X_1,X_2\in S^1 \wedge X_1>0\}$ sağ " "

$W_4=\{(X_1,X_2) \mid X_1,X_2\in S^1 \wedge X_1<0\}$ sol " "

$W_1\cap W_2=\emptyset \quad W_1\cap W_3\neq\emptyset \quad W_1\cap W_4\neq\emptyset \quad W_2\cap W_3\neq\emptyset \quad W_2\cap W_4\neq\emptyset$

$$W_1\cup W_2\cup W_3\cup W_4=S^1$$

$\{W_1,W_2,W_3,W_4\}$ kümeler ailesi S^1 in açık örtüsüdür.

$$\psi_1^{-1}: W_1 \longrightarrow I\subset \mathbb{R}$$
$$(X_1,X_2)\longrightarrow \psi_1^{-1}(X_1,X_2)=X_1=\cos u \qquad I=\{X_1 \mid X_1\in\mathbb{R} \wedge -1<X_1<1\}$$

$$\psi_2^{-1}: W_2 \longrightarrow I\subset \mathbb{R}$$
$$(X_1,X_2)\longrightarrow \psi_2^{-1}(X_1,X_2)=X_1=\cos u$$

ψ_1^{-1} ve ψ_2^{-1} homeomorfizm ve türevlenebilir.

$$\psi_3^{-1}: W_3 \longrightarrow J\subset \mathbb{R}$$
$$(X_1,X_2)\longrightarrow \psi_3^{-1}(X_1,X_2)=X_2=\sin u \qquad J=\{X_2 \mid X_2\in\mathbb{R} \wedge -1<X_2<1\}$$

$$\psi_4^{-1}: W_3 \longrightarrow J\subset \mathbb{R}$$
$$(X_1,X_2)\longrightarrow \psi_4^{-1}(X_1,X_2)=X_2=\sin u$$

ψ_2^{-1} ve ψ_3^{-1} homeomorfizm ve türevlenebilir.

$\psi_1^{-1},\psi_2^{-1},\psi_3^{-1},\psi_4^{-1}$ homeomorfizmdirler. (S^1 in bir atlası S ise)

$$S=\{\underbrace{(\psi_1,W_1)}_{\text{harita}},(\psi_2,W_2),(\psi_3,W_3),(\psi_4,W_4)\}$$ S^1 in atlasıdır.

$$W_1\cap W_3=\{(X_1,X_2):(X_1,X_2)\in S^1 \wedge X_1>0 \wedge X_2>0\}$$

Φ_{31}, Φ_{13} fonksiyonlarını tanımlayalım.

$\Phi_{13}=\psi_1^{-1}\circ\psi_3 \qquad \Phi_{31}=\psi_3^{-1}\circ\psi_1$

$$\Phi_{31}=\psi_3^{-1}\circ\psi_1 : \psi_1^{-1}(W_1\cap W_3)\longrightarrow \psi_3^{-1}(W_1\cap W_3)$$
$$X_1\longrightarrow \Phi_{31}(X_1)=(\psi_3^{-1}\circ\psi_1)(X_1)$$

$= \psi_3^{-1}(\psi_1(x_1)) = x_2$ bu fonksiyon türevlenebilirdir. $(0 < x_1 < 1)$

$x_2 = f(x_1) = x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2^2 = 1 - x_1^2$

$\Rightarrow x_2 = \mp\sqrt{1-x_1^2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{1-x_1^2}$

$F = \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \Rightarrow x_1 = 1$ de tanımlı değil.

$\Phi_{31}, \Phi_{23}, \Phi_{14}, \Phi_{32}, \Phi_{41}, \Phi_{42}$ ve Φ_{24} fonksiyonları diferansiyellenebilirdir.

$S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in \{1,2,3,4\}}$ S üzerinde diferansiyellenebilir yapıdır. (C^∞ sınıfındandır.) S^1 bir diferansiyel manifolddur. (1-boyutludur.)

(2 boyutlu öklid uzaydaki çember, 1 boyutlu manifolddur.)

(3 " " " küre, 2 " " .)

Örnek // $S^n = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) : X \in E^{n+1} \wedge \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\} \subset E^{n+1}$ kümesine n-boyutlu küre denir.

$S^2 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : X \in E^3 \wedge \sum_{i=1} x_i^2 = r^2\} \subset E^3$ kümesine, 2-boyutlu küre denir.

$S^1 = \{X = (x_1, x_2) : X \in E^2 \wedge \sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \subset E^2$ kümesine, iki boyutlu öklid uzayında 1-boyutlu küre denir.

$W_i^+ = \{P = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : P \in S^n \wedge x_i > 0 ;\ 1 \leq i \leq n+1\}$

kümesini tanımlayalım. (Bu küme n+1 tane yarım açık küre tanımlar. Pozitif yarım küredir. $x_i > 0$ olduğundan koordinat ekseni üzerindeki noktalar dahil olmayacak şekilde pozitif yarım açık küre.)

$W_i^- = \{Q = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : Q \in S^n \wedge x_i < 0 ;\ 1 \leq i \leq n+1\}$

Negatif yarım açık küredir.

$\psi^{-1} : W_i \longrightarrow B(\underset{\text{orjin}}{0}, r) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < r^2\}$ (açık yuvar.)

n+1 boyutlu uzaydan (pozitif yarım açık küreden, n boyutlu uzaya.)

$\overline{\psi_i}^{-1} : \overline{w_i} \longrightarrow B(0,r) = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : \sum_{j=1}^{n} y_i^2 < r^2\}$

fonksiyonlarını $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}) \to n+1$ boyutlu uzaydaki noktalardan $\longrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ (n boyutlu uzaydaki noktalara.)

x_i nokta çıkarılarak $= (y_1, y_2, \dots, y_n)$

3. bileşeni sıfır olan fonksiyonları $(x,y,0) \cong (x,y)$ olarak gösterebiliyoruz. $\{(x,y,0)$'dan (x,y)'ye 1:1 ve örten fonksiyon oluşturabildiğimiz için.$\}$ n+1 boyutlu uzayda $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ olarak gösterim yapılabilir.

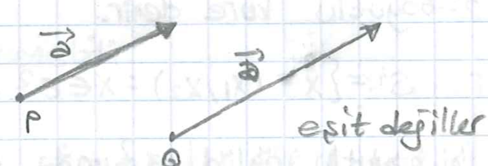
$\Phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha \qquad -1 \leq \alpha \leq n, \ -1 \leq \beta \leq n$

fonksiyonu tanımlanabilir, bunlar diferansiyellenebilir. Dolayısıyla S^n, n-boyutlu küre diferansiyellenebilir bir manifolddur.

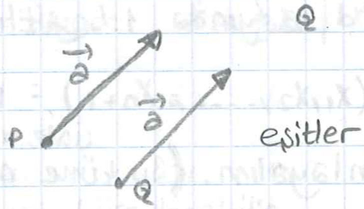
Tanjant Vektörleri

a- Yere Bağlı Olan Vektörler :

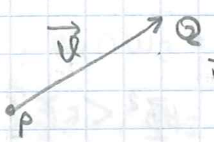
Yönü, doğrultusu, büyüklüğü ve başlangıç noktası belli olan vektörler.



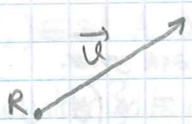
b- Yere Bağlı Olmayan Vektörler.



Tanım: (Tanjant Vektörü): Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{u} \in V$ için; $(\underset{\text{nokta}}{P}, \underset{\text{vektör}}{\vec{u}})$ ikilisine, A afin uzayının, P noktasındaki bir tanjant vektörü diyoruz.



$\vec{u} = \vec{PQ} \quad Q \in A$



$R \in A$ noktası ve $\vec{u} \in V$ vektörü alınırsa $(R, \vec{u})$ tanjant vektörü tanımlanır. İlk tanıma göre; vektörü, yere bağlı olarak tanımlarsak, P noktasındaki $\vec{v}$ ile R noktasındaki $\vec{v}$ vektörü birbirinden farklıdır. Sembolik olarak; $(P,\vec{v}) = \vec{v}_P$ tanjant vektörü $(R,\vec{v}) = \vec{v}_R$ dir.

Tanjant Vektörlerinde Eşitlik :

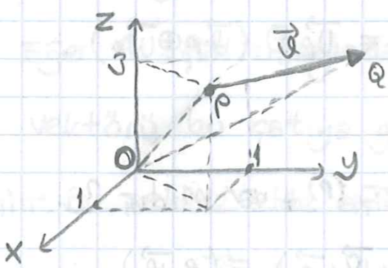
$\vec{v}_P, \vec{w}_R$ iki tanjant vektörü olsunlar.

$$\vec{v}_P = \vec{w}_R \iff (P = R \wedge \vec{v}_P = \vec{w}_R)$$

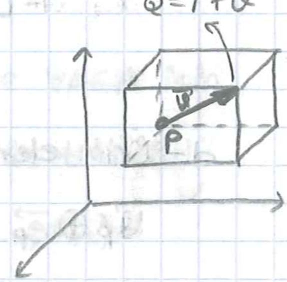
ise tanjant vektörleri eşittir. Tanjant vektörlerini yere bağlı olarak farzedeceğiz. Ama bazen, yere bağlı olmayan tanjant vektörlerini kabul edebileceğiz. Şimdilik; tanjant vektör, yere bağlı olan vektördür.

Örnek // E^3 de $P=(1,1,3)$ noktası ve $\vec{v}(2,3,2)$ vektörü veriliyor. $(P,\vec{v}) = \vec{v}_P$ tanjant vektörünü bulunuz.

$Q = P + \vec{v}$



$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$$
$$\vec{OQ} = (1,1,3) + (2,3,2)$$
$$\vec{OQ} = (3,4,5)$$



$(P,\vec{v})$ tanjant vektörü $P(1,1,3)$ noktasından $Q(3,4,5)$ noktasına giden vektördür //

22.10.95 / Pazar.

A afin uzayının bir P noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ olsun.

$$T_A(P) = \{(P,\vec{v}) : \vec{v} \in V \wedge P \in A \text{ (bir tek nokta)}\} = \{P\} \times V$$

$(P,\vec{v}) = \vec{v}_P$ ile göstereceğiz.

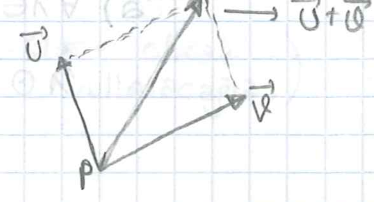
$T_A(P)$ 'de işlemler :

I- Toplama işlemi; $\oplus : T_A(P) \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$

$$[(P,\vec{u}),(P,\vec{v})] \longrightarrow (P,\vec{u}) \oplus (P,\vec{v}) = (P, \vec{u}+\vec{v})$$

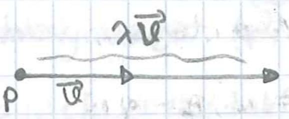
Veya $(\vec{u}_P, \vec{v}_P) \longrightarrow \vec{u}_P + \vec{v}_P = (\vec{u}+\vec{v})_P$

şeklinde tanımlanan işleme, toplama işlemi denir.



II- Skalerle Çarpma; $\odot : \mathbb{R} \times T_A^{(P)} \longrightarrow T_A^{(P)}$

$$[\lambda, (P, \vec{v})] \longrightarrow \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda\vec{v})$$



veya, $(\lambda, \vec{v}_P) \longrightarrow \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda\vec{v})_P$

şeklinde tanımlanan işleme skalerle çarpma işlemi denir.

Teorem: $\{T_A^{(P)}, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot\}$ yapısı bir vektör uzayıdır.

1° olarak $(T_A^{(P)}, \oplus)$ bir Abel grubudur.

$\oplus$ işlemi; kapalılık, değişme, birleşme, birim eleman, ters eleman özellikleri vardır.

a- Kapalılık özelliği; vardır.

b- Değişme özelliği; $\vec{U}_P \oplus \vec{v}_P = (\vec{U} + \vec{v})_P = (\vec{v} + \vec{U})_P = \vec{v}_P \oplus \vec{U}_P$.

c- Birleşme özelliği; $(\vec{U}_P \oplus \vec{v}_P) \oplus \vec{w}_P = (\vec{U} + \vec{v})_P \oplus \vec{w}_P$

$$= [(\vec{U} + \vec{v}) + \vec{w}]_P = [\vec{U} + (\vec{v} + \vec{w})]_P = \vec{U}_P \oplus (\vec{v} + \vec{w})_P$$

$$= \vec{U}_P \oplus (\vec{v}_P \oplus \vec{w}_P).$$

d- Birim eleman; $\forall \vec{v}_P \in T_A$ için

$\vec{v}_P \oplus \vec{e}_P = \vec{e}_P \oplus \vec{v}_P = \vec{v}_P$ o.ş. $\vec{e}_P \in T_A^{(P)}$ var mıdır?

$\vec{v}_P \oplus \vec{e}_P = \vec{v}_P \Rightarrow (\vec{v} + \vec{e})_P = \vec{v}_P \Rightarrow (P, \vec{v} + \vec{e}) = (P, \vec{v})$

$\Rightarrow \vec{v} + \vec{e} = \vec{v} \Rightarrow \vec{e} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{e}_P = \vec{0}_P = (P, \vec{0}) \in T_A^{(P)}$.

e- Ters Eleman; $\vec{v}_P \oplus \vec{U}_P = \vec{U}_P \oplus \vec{v}_P = \vec{e}_P = \vec{0}_P$ o.ş. $\vec{U}_P = ?$

$\vec{v}_P \oplus \vec{U}_P = \vec{0}_P \Rightarrow (v + U)_P = \vec{0}_P \Rightarrow \vec{v} + \vec{U} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = -\vec{v}$

$\Rightarrow (-\vec{v})_P$ ters elemandır.

Öyle ise $(T_A^{(P)}, \oplus)$ bir abel grubudur.

2° olarak, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisim midir?

3° olarak, $\odot : \mathbb{R} \times T_A^{(P)} \longrightarrow T_A^{(P)}$

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{U}_P, \vec{v} \in T_A^{(P)}$ için,

$$\lambda \odot (\vec{U}_P + \vec{v}_P) \overset{?}{=} (\lambda \odot \vec{U}_P) \oplus (\lambda \odot \vec{v}_P)$$

İspat// $\lambda \odot (\vec{u}_p + \vec{v}_p) = \lambda \odot (\vec{u}+\vec{v})_p = [\lambda(\vec{u}+\vec{v})_p]$

$= [\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}]_p = (\lambda\vec{u})_p \oplus (\lambda\vec{v})_p = (\lambda \odot \vec{u}_p) \oplus (\lambda \odot \vec{v}_p)$ //

b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{v}_p \in T_A(P)$, $(\lambda+\mu) \odot \vec{v}_p = (\lambda \odot \vec{v}_p) \oplus (\mu \odot \vec{v}_p)$?

c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{v}_p \in T_A(P)$, $\lambda \odot (\mu \odot \vec{v}_p) = (\lambda\mu) \odot \vec{v}_p = \mu \odot (\lambda \odot \vec{v}_p)$?

d) $1 \odot \vec{v}_p = \vec{v}_p$?

Sonuç olarak $\{T_A(P), \oplus, (\mathbb{R},+,\cdot), \odot\}$ bir vektör uzayıdır.

Tanım: $\{T_A(P), \oplus, (\mathbb{R},+,\cdot), \odot\}$ vektör uzayına A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki TANJANT UZAYI denir.

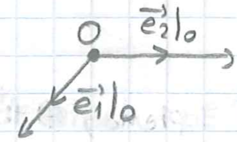
Sembolik olarak $T_A(P)$ ile gösterilir.

Özel olarak $A = E^n$ alınırsa (A afin çatı yerine, n-boyutlu öklid uzayı alınırsa) bir $p \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(P)$ ile gösterilir.

Eğer A afin uzayında bir çatı, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ise $\forall p \in A$ için $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü bu çatıya göre $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \overrightarrow{P_0P_i}$ şeklinde tek türlü yazılır. Bu şekilde elde edilen $\vec{v}_p = \overrightarrow{P_0P}$ için $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ katsayılarına, $\vec{v}_p$ tanjant vektörünün $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına göre koordinatları diyoruz.

Başlangıç noktası O(orjin) olan $T_{E^n}(O)$ nun standart bazı ;

$\vec{e}_1|_O = (O$ noktasındaki $\vec{e}_1$ vektörü$) = (1,0,0,\dots,0)|_O$



$\vec{e}_1|_P = (P$ " " $)$

$\vec{e}_2|_O = (0,1,0,\dots,0)|_O$

$\vec{e}_3|_O = (0,0,1,0,\dots 0)|_O$, ..., $\vec{e}_n|_O = (0,0,\dots 0,1)|_O$

$\Rightarrow$ bunları sembol olarak,

$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_O , \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_O , \dots , \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_O$ ile göstereceğiz.

$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_O = \vec{e}_i\Big|_O = (O, \vec{e}_i) = \left(O, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ ($\oplus = +$ ve $\odot = \cdot$ olarak kullanacağız.)

Örnek // E^3 de $P=(0,2,1)$ noktası ve $\mathbb{R}^3$ de iki vektör $\vec{v}=(1,2,3)$ ve $\vec{u}=(-2,3,4)$ olsun.

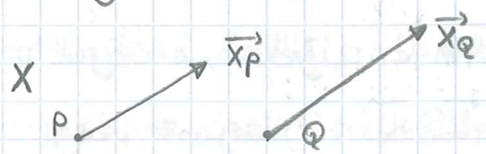
$$2\vec{u}_p - 3\vec{v}_p = (2\vec{u})_p + (-3\vec{v})_p = (2\vec{u}-3\vec{v})_p$$
$$= (-4,6,8)_p + (-3,-6,-9)_p = (-7,0,-1)_p \quad //$$

İşlemlerde p noktasının herhangi bir fonksiyonu yoktur.

Vektör Alanı

E^n de bir X vektör alanı diye $\forall p \in E^n$ noktasına bir $\vec{X}_p \in T_{E^n}(P)$ tanjant vektörünü karşılık getiren bir X fonksiyonuna denir.

$$X : E^n \longrightarrow \bigcup_{\forall p \in E^n} T_{E^n}(P)$$
$$p \longrightarrow X(p) = \vec{X}_p$$



X'i bir vektör koleksiyonu olarak düşünebiliriz. Her noktaya bir vektör karşılık getirir.

İşlemleri :

E^n deki tüm vektör alanları kümesini $\chi(E^n)$ ile gösterelim. (ki)

$$\forall X \in \chi(E^n) \text{ için; } \quad X : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$
$$p \longrightarrow X(P) = \vec{X}_p = (P, \vec{X})$$

$$Y \in \chi(E^n) \text{ için; } \quad Y : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$
$$P \longrightarrow Y(P) = \vec{Y}_p = (P, \vec{Y})$$

Toplama, $\oplus$: $(X+Y)(p) = X(p) + Y(p) = \vec{X}_p + \vec{Y}_p$ dir.

Teorem : $(\chi(E^n), \oplus)$ bir abel grubudur.

Skalerle Çarpma, $\odot$: $\mathbb{R} \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$ işlemi $\forall p \in E^n$ için,

$$(\lambda, X) \longrightarrow \lambda \odot X$$

$$(\lambda \odot X)(p) = \underset{\text{skaler}}{\lambda}\, \underset{\text{fonksiyon}}{X(p)} = \lambda \vec{X}_p \quad \text{dir.}$$

Vektör Alanlarının Fonksiyonlarla Çarpımı :

$$\underbrace{\begin{aligned} X : E^n &\longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P) \\ P &\longrightarrow X(P) = \overrightarrow{X_P} \end{aligned}}_{\text{vektörel fonksiyon}} \quad \text{ve} \quad \underbrace{\begin{aligned} f : E^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow f(P) \end{aligned}}_{\text{skaler fonksiyon}} \quad \text{veriliyor.}$$

$\forall P \in E^n$ için, $(fX)(P) = f(P)X(P) = f(P).\overrightarrow{X_P}$ şeklinde tanımlı (fX) fonksiyonuna, X vektör alanının, f fonksiyonu ile çarpımı denir.

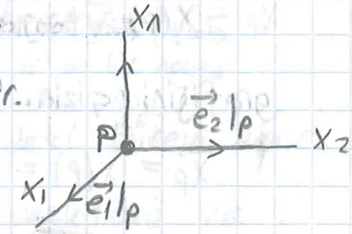
$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{aligned} f,g : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \\ y &\longrightarrow f(y) \end{aligned} & \begin{aligned} &i- (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ &ii- (fg)(x) = f(x)g(x) \\ &iii- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \; g(x) \neq 0 \end{aligned} \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C, \quad X \xrightarrow[g\circ f]{} & (g\circ f)(x) = g(f(x)) \in C \end{array} \right\}$$

Teorem : $\{\chi(E^n), \oplus, (\mathbb{R},+,\cdot), \odot\}$ bir vektör uzayıdır.

Tanım : Bu vektör uzayı $\chi(E^n)$ ile gösterilir ve E^n deki vektör alanlarının uzayı denir.

Tanım : E^n de e_1 vektör alanı; $e_1 \in \chi(E^n)$,

$e_1(P) = \overrightarrow{e_1}|_P = (1,0,\dots,0)|_P$ ile gösterilir.



$$\begin{aligned} e_1 : E^n &\longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P) \\ P &\longrightarrow \overrightarrow{e_1}|_P \end{aligned}$$

e_2 vektör alanı; $e_2 \in \chi(E^n)$,

$e_2(P) = \overrightarrow{e_2}|_P = (0,1,0,\dots,0)|_P$, ---, e_n vektör alanı $e_n \in \chi(E^n)$

---- $e_n(P) = \overrightarrow{e_n}|_P = (0,0,\dots,0,1)|_P$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ $\{X_n$ ekseni yönündeki vektör alanı$\}$

vektör alanları kümesine;

E^n deki doğal baz alanı denir.

$\longrightarrow$ $\{\overrightarrow{e_1}|_P, \overrightarrow{e_2}|_P, \dots, \overrightarrow{e_n}|_P\}$ kümesi, $T_{E^n}(P)$ nin bir ortonormal bazıdır.

Tanım: $\forall p \in E^n$ için, $\vec{Y_p}$ tanjant vektörü alalım.

$\{\vec{e_1}|_p, \vec{e_2}|_p, \ldots, \vec{e_n}|_p\}$ doğal bazı cinsinden ;

$$\vec{Y_p} = \sum_{i=1}^{n} y_i(p)\, \vec{e_i}|_p$$

olarak yazılabilir. $y_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad y_i \longrightarrow y_i(\vec{Y_p}) = y_i$
koordinat fonk.ları.

$\Rightarrow Y_p = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)(p) \Rightarrow \left\{ Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\}$

$\Rightarrow y_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına $Y \in \chi(E^n)$ vektör alanının

öklid koordinat fonksiyonları denir.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \text{ veya}$$
$$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Örnek // $U = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 9 \wedge u, v \in \mathbb{R}\} \subset E^2$ olsun.

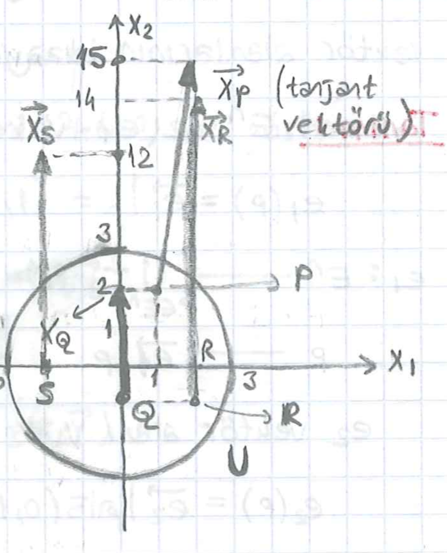
$\{x_1, x_2\}$ koordinat sistemine göre,

$$X = x_1 x_2 e_1 + 3(x_1^2 + x_2^2) e_2 = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanı veriliyor. $P = (1,2) \in U$ o.ü.

$\vec{X_p} = X(p)$ tanjant vektörünü bulup

grafiğini çizin.



$$\vec{X_p} = X(p) = \left(x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p\right)$$

$$= \underbrace{x_1(p) x_2(p)}_{\text{skaler fonksiyonu}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p}_{\text{vektör alanı fonksiyonu.}} + 3(x_1^2(p) + x_2^2(p)) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + 3(1+4) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$= 2\vec{e_1}|_p + 15\vec{e_2}|_p$$

Benzer şekilde, $O = (0,0) \Rightarrow X(O) = \vec{X_O} = \vec{O_O}$

$Q = (0,-1) \Rightarrow \vec{X_Q} = 3\vec{e_2}$

$R = (2,-1) \Rightarrow \vec{X_R} = -2\vec{e_1} + 15\vec{e_2}$

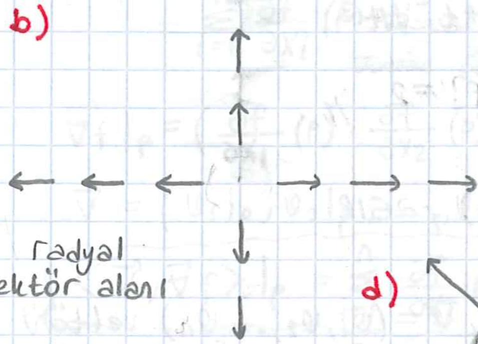
$S = (-2,0) \Rightarrow \vec{X_S} = 12\vec{e_2}|_p$

E^2 de bazı vektör alanları :

a)

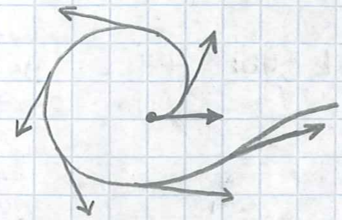
paralel vektör alanı

b)



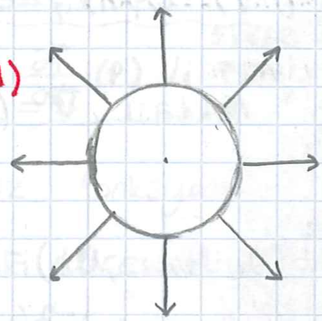
radyal vektör alanı

c)



Teğet vektör alanı

d)



Çemberin normal vektör alanı

Tanım : (Yöne Göre Türev) :

f, E^n de tanımlı diferansiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Yani : $f : E^n \xrightarrow[\text{fonk.}]{\text{dif.}} \mathbb{R}$

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \longrightarrow f(P) = f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

$P \in E^n$ (nokta) ve $V_P \in T_{E^n}(P)$ (tanjant vek.) olsun. $\vec{V_P}[f] = \frac{d}{dt} f(\underbrace{P + t\vec{V}}_{E^n \text{ de bir nokta}})\Big|_{t=0}$

reel sayısına f nin $\vec{V_P}$ tanjant vektörü yönündeki türevi denir.

Örnek // E^3 de $P = (1,1,0)$ noktası ve $\vec{V} = (1,0,-3)$ vektörü ve $f = x^2yz$ fonksiyonu veriliyor. f nin $\vec{V_P}$ tanjant vektörü yönündeki türevi, $\vec{V_P}[f]$ nedir? $\underset{P}{\bullet}\xrightarrow{\vec{V}}$?

i- $P + t\vec{V} = (1,1,0) + t(1,0,-3) = (t+1, 1, -3t)$, $t \in \mathbb{R}$

ii- $f(P + t\vec{V}) = f(t+1, 1, -3t) = (t+1)^2 . 1 . (-3t) = -3t(1+t)^2$

iii- $\frac{df(P+t\vec{V})}{dt} = -3(1+t)^2 - 3t . 2(1+t) \Rightarrow \vec{V_P}[f] = \frac{d}{dt} f(P + t\vec{V})\Big|_{t=0}$

$\vec{V_P}[f] = -3$ //

Örnek // $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow f(X)$

$f(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 . x_2 + x_3^2 + x_n^3$ fonksiyonu veriliyor.

$P=(1,1,0,\dots,0)$ ve $\vec{v}=(1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ veriliyor. $\vec{v}_P[f]=?$

$$P+t\vec{v}=(1,1,0,\dots,0)+t(1,1,\dots,1)=(1+t,1+t,t,\dots,t)$$

$$f(P+t\vec{v})=f(1+t,1+t,t,\dots,t)=(1+t)^2+t^2+t^3$$

$$\frac{df(P+t\vec{v})}{dt}=2(1+t)+2t+3t^2 \Rightarrow \vec{v}_P[f]=2 \quad //$$

Örnek // $f:E^n\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $a\in\mathbb{R}$

$\qquad X\longrightarrow f(x)=a=\text{sabit}$

fonksiyonu, $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ noktası, $\vec{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ vektörü veriliyor. $\vec{v}_P[f]=?$

$$P+t\vec{v}=(p_1,p_2,\dots,p_n)+t(v_1,v_2,\dots,v_n)=(p_1+tv_1,p_2+tv_2,\dots,p_n+tv_n)$$

$$f(P+t\vec{v})=f(p_1+tv_1,p_2+tv_2,\dots,p_n+tv_n)=a$$

$$\frac{df(P+t\vec{v})}{dt}=0 \qquad \left.\frac{df(P+tv)}{dt}\right|_{t=0}=0 \qquad \vec{v}_P[f]=0$$

Teorem: $\vec{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)\in E^n$ ve

$f:E^n\longrightarrow\mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\vec{v}_P[f]=\sum_{i=1}^{n}v_i(P)\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)=\langle\vec{v},\vec{\nabla}f\rangle\big|_P$$

$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \quad (f\text{ nin gradienti})$$

Tanjant vektörle, gradient değerinin iç çarpımı; tanjant vektörü yönündeki türevi verir.

İspat //
$$P+t\vec{v}=(p_1,p_2,\dots,p_n)+t(v_1,v_2,\dots,v_n)$$
$$=(\underbrace{p_1+tv_1}_{x_1},\underbrace{p_2+tv_2}_{x_2},\dots,\underbrace{p_n+tv_n}_{x_n})$$

$$\Rightarrow f(P+t\vec{v})=f(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad x_1=p_1+t\vec{v}_1,\dots,x_n=p_n+t\vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \frac{df(P+t\vec{v})}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}v_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}v_n$$

$f=f(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad x_i=p_i+tv_i \qquad i=1,2,\dots,n$

$$\Rightarrow \vec{V}_P[f] = \frac{d f(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{P_1,P_2,\ldots,P_n}_{P})\,V_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(-\underset{P}{-}-)\,V_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} f(P)\,V_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\,V_i \qquad \langle \vec{V}_P, \vec{\nabla} f|_P \rangle = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f \rangle|_P$$

$$\vec{\nabla} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

$$\vec{V} = (v_1|_P, v_2|_P, \ldots, v_n|_P)$$

$$\left\{ \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f \rangle|_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\,V_i = \vec{V}_P[f] \;/\!/ \right\}$$

örnek // $f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$f(x,y,z) = x^2yz$ fonksiyonunun $P(1,1,0)$ noktasındaki $\vec{v}(1,0,-3)$ yönündeki türevini bulunuz. $\vec{V}_P[f] = ?$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

$$\vec{\nabla} f|_P = (0,0,1) \qquad \vec{V}_P = (1,0,-3)|_P$$

$$\vec{V}_P[f] = \langle \vec{V}_P, \vec{\nabla} f|_P \rangle = -3 \;/\!/$$

Ödev // önceki soruları aynı yol ile çöz.

Teorem: $f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. $\forall p \in E^n$, $\forall \vec{v}_p, \vec{U}_p \in T_{E^n}(P)$, $a, b \in \mathbb{R}$ için,

a- $(a\vec{v}_p + b\vec{U}_p)[f] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{U}_p[f]$ lineerlik öz. ($\mathbb{R}$-lineerlik)

b- $\vec{v}_p[af+bg] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$ " " (f-lineerlik)

c- $\vec{v}_p[f.g] = (v_p[f])\,g(P) + f(P)\,(v_p[g])$ Leibniz kuralı.

ispat // a- $\forall \vec{v}_p, \vec{U}_p \in T_{E^n}(P)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için 3.11.95/CUMA

$$(a\vec{v}_p + b\vec{U}_p)[f] \overset{?}{=} a\vec{v}_p[f] + b\vec{U}_p[f]$$

n-boyutlu öklid uzayında $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ olsun. Ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\vec{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ olsunlar.

$$a\vec{v} + b\vec{U} = a(v_1, v_2, \ldots, v_n) + b(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

$$= (av_1 + bU_1, av_2 + bU_2, \ldots, av_n + bU_n)$$

$$\Rightarrow (a\vec{v}_p + b\vec{U}_p)[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P (av_i + bU_i) = \langle a\vec{v} + b\vec{U}, \vec{\nabla} f \rangle|_P$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[a . \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p v_i + b \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p u_i \right]$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p v_i + b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p u_i$$

$$\Rightarrow (a\vec{v}_p + b\vec{u}_p)[f] = a\,\vec{v}_p[f] + b\,\vec{u}_p[f]$$

↳ f'nin U_p yönündeki türevi.

O halde yöne göre türev IR-lineerdir. (Reel sayılar kümesi üzerinde lineerlik özelliği vardır.)

ispat // b - $a,b \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$, $f,g : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} P \longrightarrow f(P) \\ P \longrightarrow g(P) \end{array}\right\} \text{n- değişkenli fonk.lar.}$$

$$\vec{v}_p[af+bg] \overset{?}{=} a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$$

Gradient fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak ispatlayalım.

$$\vec{v}_p[af+bg] = \langle \vec{v}, \vec{\nabla}(af+bg) \rangle |_p$$

$$\vec{\nabla}(af+bg) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(af+bg)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(af+bg), \frac{\partial}{\partial x_2}(af+bg), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(af+bg)\right]$$

$$= \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + b\frac{\partial g}{\partial x_1}, a\frac{\partial f}{\partial x_2} + b\frac{\partial g}{\partial x_2} + \dots + a\frac{\partial f}{\partial x_n} + b\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$

$$= \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, a\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \left(b\frac{\partial g}{\partial x_1} + b\frac{\partial g}{\partial x_2} + \dots + b\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$

$$\vec{\nabla}(af+bg) = a\vec{\nabla}f + b\vec{\nabla}g$$ (gradient fonksiyonu lineerdir.)

$$\Rightarrow \vec{v}_p[af+bg] = \langle \vec{v}, a\vec{\nabla}f + b\vec{\nabla}g \rangle |_p$$

$$= \langle \vec{v}, a\vec{\nabla}f \rangle |_p + \langle \vec{v}, b\vec{\nabla}g \rangle |_p$$

$$= a \langle \vec{v}, \vec{\nabla}f \rangle |_p + b \langle \vec{v}, \vec{\nabla}g \rangle |_p$$

$$= a\,\vec{v}_p[f] + b\,\vec{v}_p[g]$$

O halde yöne göre türev f-lineerdir. (fonksiyonlar üzerinde lineerlik özelliği vardır.)

ispat // c - $\vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$, f,g reel değerli fonksiyonlar olsun.

$$\vec{v}_p[fg] \underset{?}{=} (\vec{v}_p[f])g(P) + f(P)(\vec{v}_p[g])$$

$$\vec{v}_p[fg] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}\Big|_p . v_i = \langle \vec{v}, \vec{\nabla}(fg) \rangle \big|_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \, g(P) + f(P) \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p \right] v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \, g(P)\, v_i + f(P) \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p . v_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \, g(P)\, v_i + \sum_{i=1}^{n} f(P) \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p v_i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p v_i \right) g(P) + f(P) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p v_i \right)$$

$$= (\vec{v}_p[f])\, g(P) + f(P) \big(\underbrace{\vec{v}_p[g]}_{} \big)$$

→ v_p vektörü yönünde g'nin türevi.

Bu ise Leibniz kuralını verir.

Tanım: (Vektör Alanı Yönünde Türev):

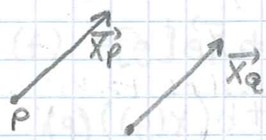
$X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun.

E^n de tanımlanan vektör alanlarının kümesi.

herbir noktaya bir tanjant vektör getiren fonksiyon.

$$X : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$

$$P \longrightarrow X(P) = \vec{X}_P \longrightarrow \text{tanjant vektörü}$$



tüm özellikleri aynı fakat başlangıç ve bitiş noktaları farklı.

$f \in C(E^n, \mathbb{R}) \Leftarrow f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir.

C' sınıfından (1. mertebeden türevlenebilir.)

$f \in C^k(E^n, \mathbb{R})$ k.-ıncı mertebeden türevlenebilen fonksiyon.

$\forall P \in E^n$ için, $(X(f))(P) = \vec{X}_P[f]$ olmak üzere, ($X(f) \to E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyon; X vektör alanı)

$X(f) \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonuna, f nin X vektör alanına göre türevi veya f'nin kovaryant türevi denir.

Eğer $Q \in E^n$ alırsak, $(X(f))(Q) = \overrightarrow{X_Q}[f]$ olur.

Teorem: (kovaryant türevin özelliklerini veren teorem)

$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall f, g, h \in C(E^n, \mathbb{R})$ için ;

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

Y vektör alanı yönünde h nin kovaryant türevi

i- $(fX + gY)(h) = fX(h) + gY(h)$

$(fg)_P = f(P)g(P)$

$(f \mp g)_P = f(P) \mp g(P)$

ii- $X(af + bg) = aX(f) + bY(g)$

iii- $X(fg) = (X(f))g + f(X(g))$ dir.

ispat// i- $[(fX + gY)(h)](P) = (fX + gY)_P[h] = ((fX)(P) + (gY)(P))[h]$

$\forall P \in E^n$,

$= [\underbrace{f(P)}_{\text{skaler}} X(P) + g(P)Y(P)][h]$

$= [f(P)\overrightarrow{X_P} + g(P)\overrightarrow{Y_P}][h]$

$= f(P)\overrightarrow{X_P}[h] + g(P)\overrightarrow{Y_P}[h]$ (yöne göre türevden)

$= f(P)(X(h))(P) + g(P)(Y(h))(P)$ (kovaryant türev tanımından)

$= (f(X(h)))(P) + (g(Y(h)))(P)$

$= (f(X(h)) + g(Y(h)))(P)$

$\Rightarrow (fX + gY)(h) = f(X(h)) + g(Y(h))$

ispat// ii- $\forall P \in E^n$, $(X(af + bg))(P) = \overrightarrow{X_P}[af + bg]$

$= a\overrightarrow{X_P}[f] + b\overrightarrow{X_P}[g]$

$= a(X(f))(P) + b(X(g))(P)$

$= (a(X(f)) + b(X(g)))(P)$

$\Rightarrow X(af + bg) = a(X(f)) + b(X(g))$

ispat// iii- $\forall P \in E^n$, $(X(fg))(P) = \overrightarrow{X_P}[fg]$

$X : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$ $\qquad f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$P \longrightarrow \overrightarrow{X_P} = X(P)$ $\qquad P \longrightarrow f(P)$

$X_P[fg] = (\overrightarrow{X_P}[f])g(P) + f(P)(\overrightarrow{X_P}[g])$

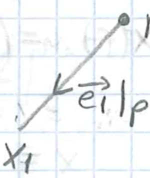
$= (X(f))(P)g(P) + f(P)(X(g))(P)$

$= ((X(f))g)(P) + (f(X(g)))(P)$

$$= \big((X(f))g + f(X(g))\big)(P)$$

$$\Rightarrow \quad X(fg) = (X(f))g + f(X(g)) \quad \text{(Leibniz kuralı)}$$

Örnek // E^n de $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ standart baz vektör alanını düşünelim.



$$f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C(E^n, \mathbb{R})$$
$$P \longrightarrow f(P)$$

fonksiyonu verilsin. $\forall P \in E^n$ için $(X(f))(P) = \vec{X_P}[f]$ olduğundan, eğer $X = e_i$ alırsak i-inci vektör yönündeki kovaryant vektörü bulalım.

$\Rightarrow (e_i(f))(P) = \vec{e_i}_P[f]$: i. eksendeki birim vektörün f yönündeki türevi

$$= \langle e_i, \vec{\nabla} f \rangle|_P$$

$$\vec{e_i}|_P = (0, \ldots, 0, \underset{\downarrow i.\ \text{eksen.}}{1}, 0, \ldots, 0), \quad \vec{\nabla} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P \Rightarrow (e_i(f))(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$$

$$\Rightarrow e_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \vec{e_i}_P[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$$

e_i fonksiyonunun f'deki değeri

$e_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \Rightarrow \boxed{e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}}$ (fonksiyonların eşitliği tanımından)

$$\Rightarrow \vec{e_i}|_P = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$$

herhangi bir vektör alanını $\frac{\partial}{\partial x_i}$ nin fonksiyonu olarak gösterebilir miyiz?

Örnek // $X \in \mathfrak{X}(E^n)$ ve

$f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olmak üzere, $\forall P \in E^n$ için ; $(P = (P_1, P_2, \ldots, P_n))$

$(X(f))(P) = \vec{X_P}[f]$ $\qquad \vec{X_P} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)|_P$ olsun.

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i(P)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i(P)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right](P)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right)(P)$$

$$(X(f))(P) = \sum_{i=1}^{n}\left[v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right](P)$$

$$\Rightarrow \quad X(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$$

$$\Rightarrow \quad X(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)$$

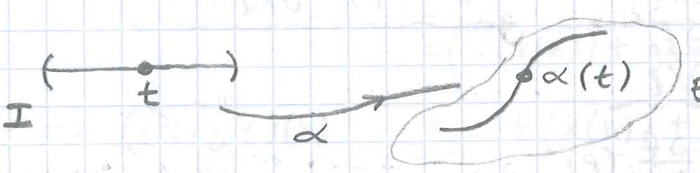
$$\Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

Herhangi bir X vektör alanı, standart baz vektör alanı cinsinden, tek türlü olarak yazılmış oldu.

$$X = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$ şeklindedir.

Tanım: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, $\alpha : I \longrightarrow E^n$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri denir.

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\big|_t = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$



$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\alpha_1(t+\Delta t), \alpha_2(t+\Delta t), \dots, \alpha_n(t+\Delta t) - (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\alpha_1(t+\Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_2(t+\Delta t) - \alpha_2(t)}{\Delta t}, \dots, \frac{\alpha_n(t+\Delta t) - \alpha_n(t)}{\Delta t}\right)$$

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)$$

Tanım: $\vec{\alpha}'(t) = \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}$ tanjant vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. $\alpha'(t)$ ile gösterilir.

Teorem: $\alpha : I \longrightarrow E^n$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f(P)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\boxed{\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt}\Big|_t = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)} \text{ dir.}$$

İspat// $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = \frac{d\alpha_1(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)\Big|_{\alpha(t)}$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = \langle \alpha'(t), \vec{\nabla} f\rangle\big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t$$

Ayrıca,

$$f(\alpha(t)) = (f\circ\alpha)(t) = f(\underbrace{\alpha_1(t)}_{x_1}, \underbrace{\alpha_2(t)}_{x_2}, \dots, \underbrace{\alpha_n(t)}_{x_n})$$

$$I \xrightarrow{\alpha} E^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$t \xrightarrow{f\circ\alpha} (f\circ\alpha)(t)$$

Bu bileşik fonksiyonun, t'ye göre türevi;

$$\frac{d(f(\alpha(t)))}{dt} = \frac{d}{dt}[(f\circ\alpha)]\Big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t$$

Sonuç olarak;

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha(t)))}{dt} = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_t \text{ dir. //}$$

Tanım: $\alpha'(t)[f] = D_{\alpha'(t)} f$ olarak gösterilir. ve

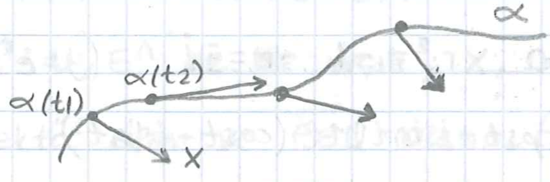
(α' yönünde bir f fonksiyonunun yöne göre türevi.)

$f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, $\alpha: I \longrightarrow E^n$ eğrisi boyunca kovaryant türevi denir.

Tanım: $\alpha: I \longrightarrow E^n$ bir eğri ve $X \in \chi(E^n)$ (vektör alanı) olsun. $\forall t \in I$ için,

$$X(t) = \vec{X}_{\alpha(t)} = X(\alpha(t))$$

ise, X'e α eğrisi boyunca bir vektör alanı denir.



Tanım: $\alpha: I \longrightarrow E^n$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ bir eğri olsun.

X 'de E^n de bir vektör alanı olsun, $X \in \chi(E^n)$.

$\forall t \in I$ için, $\dfrac{d\alpha(t)}{dt} = X(\alpha(t))$ ise

eğrinin hız vektörü — eğri üzerindeki noktadaki değerine eşitse

(α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü X vektör alanının $\alpha(t)$ deki değerine eşitse) bu taktirde ;

α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir.

Örnek // E^2 de bir vektör alanı X olsun. $P=(P_1,P_2)\in E^2$ için $X(P)=\vec{X_P}=(P;(-P_2,P_1))=(P,\vec{X})$ olsun. X'in integral eğrisini bulun.

Eğer böyle bir eğri varsa, $\alpha: I \longrightarrow E^2$
$t \longrightarrow \alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$

şeklindedir. Böyle bir eğri olduğunu kabul edelim. Ayrıca, integral eğrisi tanımından dolayı, $\frac{d\alpha(t)}{dt}=X(\alpha(t))$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \frac{d\alpha(t)}{dt}=\alpha'(t)=\left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt},\frac{d\alpha_2(t)}{dt}\right)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt},\frac{d\alpha_2}{dt}\right)\Big|_t$$

$$\Rightarrow X(\alpha(t))=X(\alpha_1(t),\alpha_2(t))=\vec{X}_{\alpha(t)}=(\alpha(t);(-\alpha_2(t),\alpha_1(t)))$$

Bu iki ifade eşit olmalıdır. O halde ;

$$\Rightarrow \left(\frac{d\alpha_1}{dt},\frac{d\alpha_2}{dt}\right)\Big|_t=(-\alpha_2,\alpha_1)\big|_{\alpha(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_1}{dt}=-\alpha_2 \text{ ve } \frac{d\alpha_2}{dt}=\alpha_1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}=-\frac{d\alpha_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha_2}{dt}=-\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \text{ yerine yazalım,}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}=\alpha_1 \Rightarrow \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+\alpha_1=0$$

$\alpha_1''+\alpha_1=0 \qquad r^2+1=0 \qquad r^2=-1 \qquad r=\mp i \qquad (y=e^{rt})$

$\alpha_1=Ae^{it}+Be^{-it}=A(\cos t+i\sin t)+B(\cos t-i\sin t)$

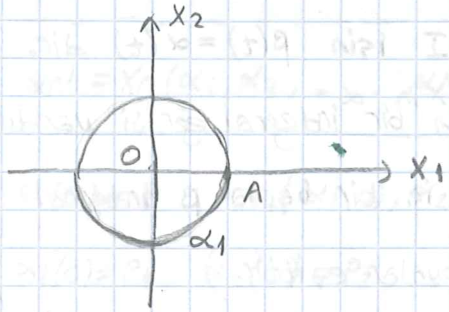
$\alpha_1=c_1\cos t+c_2\sin t$ //

$\alpha_2=-\frac{d\alpha_1}{dt}=-(-c_1\sin t+c_2\cos t)$

$\alpha_2=c_1\sin t-c_2\cos t$ //

$\alpha(t)=(c_1\cos t+c_2\sin t,\ c_1\sin t-c_2\cos t)$ } Verilen X vektör alanının integral eğrisidir.

Soru // i – Bu integral eğrileri içinde $(1,0)$ dan geçenini bulup grafiğini çizelim.



$t=0 \Rightarrow \alpha(0)=(1,0)$ olsun.

$\Rightarrow (1,0)=(c_1,-c_2)$

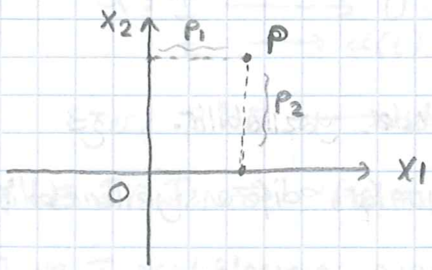
$\Rightarrow c_1=1 \wedge c_2=0$ //

$\Rightarrow \alpha_1(t)=(\underbrace{\cos t}_{\alpha_1}, \underbrace{\sin t}_{\alpha_2}) \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2=1$

$$\alpha=\{(\alpha_1,\alpha_2): \alpha(t)=(\cos t,\sin t)\}=\{(\alpha_1,\alpha_2): \alpha_1^2+\alpha_2^2=1\} \text{ //}$$

ii – Bu eğriler içinde $P=(P_1,P_2)$ gibi bir noktadan geçenini bulun.

$t=0 \Rightarrow \alpha(0)=P$ olanını arıyoruz.

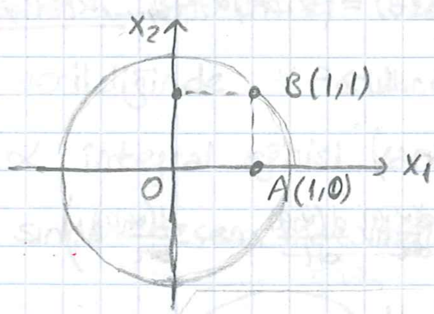


$\Rightarrow (P_1,P_2)=(c_1,-c_2)$

$\Rightarrow c_1=P_1 \wedge c_2=-P_2$ //

$\alpha_2(t)=(P_1\cos t - P_2\sin t, P_1\sin t+P_2\cos t)$

iii – Bu eğriler içinde $(1,1)$ den geçen, integral eğrisini bulun.



$t=0 \Rightarrow \alpha(0)=(1,1)$

$\Rightarrow (c_1,-c_2)=(1,1)$

$\Rightarrow c_1=1 \wedge c_2=-1$

$\alpha_3(t)=(\cos t-\sin t, \sin t+\cos t)$

$$\|\alpha_3(t)\|=\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}=\sqrt{2} \text{ (sabit)}$$

Ödev // $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, noktalarından geçen integral eğrilerini bul.

Teorem: U, E^n de bir açık; X, U üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı ve $\overset{\text{nokta}}{P}\in U$ olsun. (X vektör alanının koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir ise X vektör alanına, diferansiyellenebilirdir denir.) Bu taktirde X'in öyle bir integral eğrisi

$$\alpha: I \longrightarrow U\subset E^n \qquad t \longrightarrow \alpha(t)$$

vardır ki;

i- $\alpha(0)=P$, $0\in I$ dır.

ii- $\beta(0)=P$ olmak üzere, X in U üzerindeki diğer bir integral eğrisi $\beta: J \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} U$ $\forall t\in J\cap I$ için $\beta(t)=\alpha(t)$ dir.

(i- Verilen bir $P^{\in U}$ noktasından başlayan X'in bir α integral eğrisi vardır.

ii- Eğer aynı $\in U$ P noktasından başlayan X in bir başka β integral eğrisi varsa bu tektir. $\alpha(t)=\beta(t)$ bunlar eşittir.)

İspat// X vektör alanı için;

$$X(P)=\overrightarrow{X_P}=(P,(x_1(P),x_2(P),\dots,x_n(P)))$$ olduğundan,

$$\Rightarrow X=(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$ şeklinde yazılabilir.

Burada; $x_i: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow x_i(P)$ fonksiyonları diferansiyellenebilirdir.

E^n de bir α eğrisi; $\alpha: I \xrightarrow{\subset\mathbb{R}} U\subset E^n$, $t\longrightarrow \alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$

şeklinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

($\alpha_i: I\longrightarrow \mathbb{R}$, $t\longrightarrow \alpha_i(t)$ diferansiyellenebilirdir.)

$$\frac{d(\alpha(t))}{dt}=\alpha'(t)=X(\alpha(t))=\left(\alpha(t):\left(\frac{d(\alpha_1(t))}{dt},\frac{d(\alpha_2(t))}{dt},\dots,\frac{d(\alpha_n(t))}{dt}\right)\right)$$

α, X vektör alanının bir integral eğrisi olsun.

$$\Rightarrow \alpha'(t)=X(\alpha(t))$$ (integral eğrisi tanımından)

$$=\left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt},\frac{d\alpha_2(t)}{dt},\dots,\frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)=(x_1,x_2,\dots,x_n)(\alpha(t))$$
$$=(x_1(\alpha(t)),x_2(\alpha(t)),\dots,x_n(\alpha(t)))$$

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt}=x_1(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$$

$$\frac{d\alpha_2(t)}{dt}=x_2(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$$ - - -

- - - - - -

$$\frac{d\alpha_n(t)}{dt}=x_n(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$$

(1) $\alpha_1' = X_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
$\alpha_2' = X_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
$\ldots$
$\alpha_n' = X_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

n-değişkenli 1. mertebeden bir diferansiyel denklem sistemidir.

(2) $\alpha(0) = P \Rightarrow (\alpha_1(0), \alpha_2(0), \ldots, \alpha_n(0)) = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$\alpha_1(0) = P_1,\ \alpha_2(0) = P_2, \ldots, \alpha_n(0) = P_n$

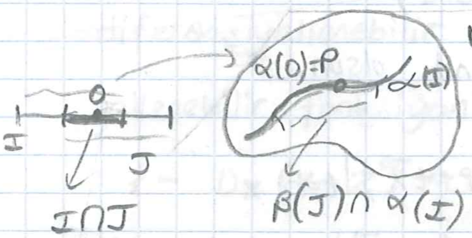
Diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremlerinden dolayı, (1) diferansiyel denklem sisteminin (2) şartlarını sağlayan bir tek çözümü vardır. Bu çözüm ;

$$\alpha : I \longrightarrow U, \quad t \longrightarrow \alpha(t)$$

eğrisidir. $\alpha(0) = P$ vardır.

Eğer $\beta : J \longrightarrow U$, $\beta(0) = P$ olan başka bir çözümse, $\forall t \in I \cap J \Rightarrow \alpha(t) = \beta(t)$ olur. O halde α ve β eğrisi I ve J aralıklarının aynı ortak bölgesinde aynı eğrilerdir.

Tanım : Bir $U \subset E^n$ üzerinde tanımlı bir X vektör alanı verildiğinde $\forall P \in U$ için $\alpha(0) = P$ olacak şekilde X'in bir α integral eğrisi vardır. Bu α integral eğrisine, X'in p noktasından geçen maksimal integral eğrisi denir.



$X \qquad \alpha(0) = P, \quad \alpha' = X(\alpha)$

Tanım : (Kovaryant Türev = Vektör Alanı Yönündeki Türev) :

$X, Y \in \chi(E^n)$, iki vektör alanı olsun.

$P \in E^n$ için, $X(P) = \vec{X_P} = (P, (X_1(P), X_2(P), \ldots, X_n(P)))$

$= (X_1, X_2, \ldots, X_n)|_P$

$\Rightarrow X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$X_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad i=1,2,\dots,n$ $\quad$ X'in koordinat fonksiyonlarıdır.
$\quad\; P \longrightarrow X_i(P)$

i - Eğer $X_i \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ ise X vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. Benzer şekilde Y vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir.

ii - $\alpha(t) = Y(P+t\vec{X})$ olmak üzere ;

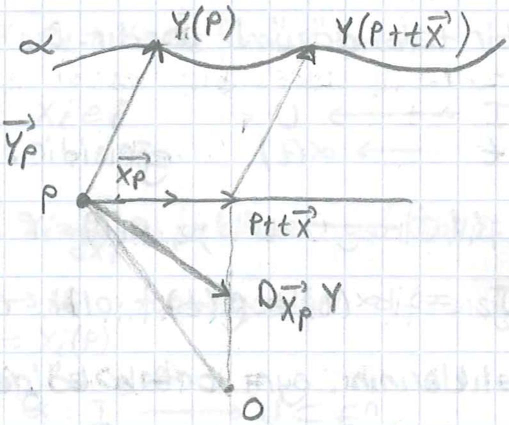
$$\boxed{D_{\vec{X}_P} Y = \frac{d\alpha(0)}{dt} = \frac{d}{dt} Y(P+t\vec{X})\Big|_{t=0}}$$

vektörüne Y vektör alanının $\vec{X}_P$ ye göre P noktasındaki kovaryant türevi denir. $D_{\vec{X}_P} Y$ ile gösterilir.

$P = \vec{OP}$, $t\vec{X}_P$

$Y(P+t\vec{X}) = \alpha(t)$ $\quad Y(P) = \vec{Y}_P$

$\alpha(0) = Y(P)$



Teorem: (Kovaryant türevin hesaplanmasıyla ilgili teoremdir.)

$X_P \in T_{E^n}(P)$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \chi(E^n)$ olsun.

$$D_{X_P} Y = (\vec{X}_P[y_1], \vec{X}_P[y_2], \dots, \vec{X}_P[y_n])$$

→ y_n koordinat fonk. $\vec{X}_P$ yönündeki türevi.

İspat // $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olsun.

$\forall P \in E^n$ için, $(D_X Y)(P) = D_{\vec{X}_P} Y = \frac{d}{dt} Y(P+t\vec{X})\Big|_{t=0}$

$$\Rightarrow Y(P+t\vec{X}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\Big)(P+t\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i e_i)(P+t\vec{X})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i(P+t\vec{X})\, e_i(P+t\vec{X})$$

$$\frac{dY(P+t\vec{X})}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} y_i(P+t\vec{X})\, e_i(P+t\vec{X})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{d}{dt} y_i(P+t\vec{X})\Big] e_i(P+t\vec{X})$$

$$\left.\frac{dY(P+t\vec{X})}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\, y_i(P+t\vec{X})\right]_{t=0} e_i(P+t\vec{X})\Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \frac{dY(P)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} y_i(P+t\vec{X})\Big|_{t=0} e_i(P)$$

*$\vec{X}_P$ tan. vek. yönünde y_i nin türevi

$$\vec{V}_P[f] = \frac{d}{dt} f(P+t\vec{V})\Big|_{t=0}, \quad \frac{dy_i(P+t\vec{X})}{dt} = \vec{X}_P[y_i]$$

$$\Rightarrow D_{\vec{X}_P} Y = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_P[y_i]\,\vec{e_i}(P) = \left(\vec{X}_P[y_1], \vec{X}_P[y_2], \dots, \vec{X}_P[y_n]\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} D_X Y = \left(X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n]\right) = \sum_{i=1}^{n} X[y_i]\dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ X[y_i] = \langle X, \nabla y_i \rangle \end{array}}$$

örnek// $X=(-1,0,2)$ sabit bir vektör alanı, $Y=(\overset{y_1}{x_1^2}, \overset{y_2}{0}, \overset{y_3}{x_2x_3})$
$= x_1^2 e_1 + x_2x_3 e_3$

olduğuna göre $D_X Y = ?$ (X vektör alanı yönünde Y nin kovaryant türevi.)

$$D_X Y = \left(X[y_1], X[y_2], X[y_3]\right)$$
$$= \left(X[x_1^2], X[0], X[x_2x_3]\right)$$

$$X[x_1^2] = \langle X, \nabla x_1^2\rangle = \langle(-1,0,2),(2x_1,0,0)\rangle = -2x_1$$

$$X[0] = \langle X, \underbrace{\nabla 0}_{0}\rangle = 0$$

$$X[x_2x_3] = \langle(-1,0,2),(0,x_3,x_2)\rangle = 2x_2$$

$$\Rightarrow D_X Y = (-2x_1, 0, 2x_2)$$

Teorem: X, W; E^n de iki vektör alanı; Y, Z E^n de iki diferansiyellenebilir vektör alanı, $f: E^n \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. ($f \in C(E^n, \mathbb{R})$)

i- $D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z$

ii- $D_{X+W} Y = D_X Y + D_W Y$

iii- $D_{fX} Y = f D_X Y$

iv- $D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y$ dir.

ispat// i- $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve $Z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ olsun.

$\Rightarrow Y+Z = (y_1+z_1, y_2+z_2, \dots, y_n+z_n)$

$\Rightarrow D_X(Y+Z) = \left(X[y_1+z_1], X[y_2+z_2], \ldots, X[y_n+z_n]\right)$

$= \left(X[y_1]+X[z_1], X[y_2]+X[z_2], \ldots, X[y_n]+X[z_n]\right)$

$= \left(X[y_1], X[y_2], \ldots, X[y_n]\right) + \left(X[z_1], X[z_2], \ldots, X[z_n]\right)$

$\Rightarrow \underline{D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z}$ //

ispat// ii- $D_{X+W} Y = \left((X+W)[y_1], (X+W)[y_2], \ldots, (X+W)[y_n]\right)$

$\Rightarrow (X+W)[y_1] = \langle X+W, \nabla y_1\rangle = \langle X, \nabla y_1\rangle + \langle W, \nabla y_1\rangle$

$= X[y_1] + W[y_1]$

$= \left(X[y_1]+W[y_1], X[y_2]+W[y_2], \ldots, X[y_n]+W[y_n]\right)$

$= \left(X[y_1], X[y_2], \ldots, X[y_n]\right) + \left(W[y_1], W[y_2], \ldots, W[y_n]\right)$

$\Rightarrow \underline{D_{X+W} Y = D_X Y + D_W Y}$ // (önemli)

ispat// iii- $\forall P \in E^n$, $(D_{fX} Y)(P) = D_{(fX)(P)} Y = D_{f(P)X(P)} Y$

$= D_{f(P)\vec{X}_P} Y$

$(D_{fX} Y)(P) = \left((f(P)\vec{X}_P)[y_1], (f(P)\vec{X}_P)[y_2], \ldots, (f(P)\vec{X}_P)[y_n]\right)$

$= \left(f(P)\vec{X}_P[y_1], f(P)\vec{X}_P[y_2], \ldots, f(P)\vec{X}_P[y_n]\right)$

$= f(P)\left(\vec{X}_P[y_1], \vec{X}_P[y_2], \ldots, \vec{X}_P[y_n]\right)$

$= f(P)\, D_{\vec{X}_P} Y = (f D_X Y)(P)$.

$\Rightarrow \underline{D_{fX} Y = f D_X Y}$ //

ispat// iv- $\forall P \in E^n$, $[D_X(fY)](P) =$

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Rightarrow fY = (fy_1, fy_2, \ldots, fy_n)$

$[D_X(fY)](P) = \left(X_P[fy_1], X_P[fy_2], \ldots, X_P[fy_n]\right)$

$= \left(X_P[f]y_1(P) + f X_P[y_1], X_P[f]y_2^{(P)} + f^{(P)} X_P[y_2], \ldots, X_P[f]y_n^{(P)} + f^{(P)} X_P[y_n]\right)$

$= \left(\underbrace{X_P[f]}_{\text{reel sayı}} y_1^{(P)}, X_P[f]y_2^{(P)}, \ldots, X_P[f]y_n^{(P)}\right) + \left(f^{(P)} X_P[y_1], f^{(P)} X_P[y_2], \ldots, f^{(P)} X_P[y_n]\right)$

$= X_P[f]\left(y_1^{(P)}, y_2^{(P)}, \ldots, y_n^{(P)}\right) + f(P)\left(X_P[y_1], X_P[y_2], \ldots, X_P[y_n]\right)$

$= \vec{X}_P[f]\, Y|_P + f_{(P)} D_{\vec{X}_P} Y = (X[f]\,Y)(P) + (f D_X Y)(P)$

$= (X[f]\,Y + f D_X Y)(P)$

$\Rightarrow \underline{D_X(fY) = X[f]\,Y + f D_X Y}$ // önemli.

LİE OPERATÖRÜ (Lie Parantez Operatörü)

Tanım: V bir K cismi üzerinde tanımlı n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bir $[\,,\,]: V \times V \longrightarrow V$ dönüşümü $(K = \mathbb{R})$

i – 2-lineer (bilineer)dir: $\forall X, Y, Z \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

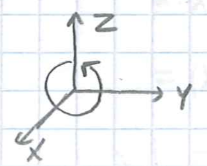
$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

ii – Alternedir: $[X, Y] = -[Y, X]$ (değişmeli değildir.)

iii – Jacobi özdeşliği vardır: $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$



(X, Y, Z sırasında dairesel permütasyon.)

özellikleri sağlanıyorsa, bu taktirde $[\,,\,]$ dönüşümüne V üzerinde bir LİE OPERATÖRÜ (Lie Parantez Operatörü veya Bracket) denir.

Tanım: $(V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot, [\,,\,])$ = cebirdir.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisim, $(V, \oplus)$ abel grubu,

Bu özellikleri sağlayan V vektör uzayına bir lie cebiri denir.

Teorem: E^n de vektör alanlarının kümesi $\chi(E^n)$ olsun.

$$[\,,\,]: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$$
$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için, $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$ şeklinde tanımlanırsa, $[X, Y]$ bir Lie Operatörüdür.

İspat// i – $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ ve $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$[aX + bY, Z] \stackrel{?}{=} a[X, Z] + b[Y, Z]$ $\quad \forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için,

$$[aX + bY, Z](f) = (aX + bY)(Zf) - Z((aX + bY)f)$$
$$= a(X(Zf)) + b(Y(Zf)) - Z(a(Xf) + b(Xf))$$

$$= a(X(Zf)) + b(Y(Zf)) - a(Z(Xf)) - b(Z(Yf))$$

$$= a(X(Zf) - Z(Xf)) + b(Y(Zf) - Z(Yf))$$

$$= a[X,Z](f) + b[Y,Z](f)$$

$$\Rightarrow \quad [aX+bY, Z](f) = a[X,Z](f) + b[Y,Z](f)$$

$$[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$

Benzer şekilde ;

$[X, aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$ dir. (Bilineerdir.)

İspat// ii- $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

$$= -(Y(Xf) - X(Yf))$$

$$= -[Y,X](f)$$

$$\Rightarrow \quad [X,Y](f) = -[Y,X](f)$$

$\Rightarrow \quad [X,Y] = -[Y,X]$ (alterne özelliği)

İspat// iii- $[X,[Y,Z]](f) = X([Y,Z]f) - [Y,Z](Xf) - (Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf)))$

$$[X,[Y,Z]](f) = X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))$$

Benzer şekilde ;

$$[Y,[Z,X]](f) = Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf))$$

Son olarak ,

$$[Z,[X,Y]](f) = Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf))$$

Bu ifadeleri taraf tarafa toplarsak ,

$$\Rightarrow \left([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]\right)(f) = 0$$

$\Rightarrow \quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ olur.

Jacobi özelliği vardır.

Sonuç olarak bu şekilde tanımlanan $[\,,]$ operatörü bir parantez operatörü olur.

Tanım: $\underset{\text{skaler fonk. kümesi}}{C^\infty(E^n,\mathbb{R})} \times \underset{\text{vektör alanları kümesi}}{\chi(E^n)} \longrightarrow \chi(E^n)$

$(f, X) \longrightarrow fX$

işlemi tanımlanıyor. $\forall P \in E^n$ için, $(fX)(P) = f(P)\overrightarrow{X_P}$

Teorem: $\chi(E^n)$ de $[\,,]$ Lie operatörü verilsin. Bu durumda,

$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(E^n,\mathbb{R})$ için,

i- $[X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$

ii- $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

İspat// i- $[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg))$

$= X(f(Yg) + g(Yf)) - Y(g(Xf) + f(Xg))$

$X(g) = Xg = X[g]$ //

$= X(f(Yg)) + X(g(Yf)) - Y(g(Xf)) - Y(f(Xg))$

$= \cancel{(Xf)(Yg)} + f(X(Yg)) + \cancel{(Xg)(Yf)} + g(X(Yf))$

$- \cancel{(Yg)(Xf)} - g(Y(Xf)) - \cancel{(Yf)(Xg)} - f(Y(Xg))$

$= f(X(Yg) - Y(Xg)) + g(X(Yf) - Y(Xf))$

$[X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$ //

İspat// ii- $\forall h \in C^\infty(E^n,\mathbb{R})$ için,

$[fX, gY](h) = (fX)((gY)h) - (gY)((fX)h)$

$= fX(g(Yh)) - gY(f(Xh))$

$= f((Xg)(Yh) + g(X(Yh))) - g((Yf)(Xh) + f(Y(Xh)))$

$= f(Xg)(Yh) + fg(X(Yh)) - g(Yf)(Xh) - gf(Y(Xh))$

$= f(Xg)(Yh) - g(Yf)(Xh) + fg(X(Yh) - Y(Xh))$

$= (f(Xg)Y)(h) - (g(Yf)X)(h) + fg[X,Y](h)$

$\Rightarrow [fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

İspat// iii- $\forall f \in C^\infty(E^n,\mathbb{R})$ için

$[X,X] = X(Xf) - X(Xf) = 0 \Rightarrow [X,X](f) = 0$

$\Rightarrow [X,X] = 0$ //

Örnek // $\mathbb{R}^3$ de vektörel (dış) çarpım bir Lie Operatörü dür: Tanım

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\alpha,\beta) \longrightarrow \alpha\wedge\beta$$

$\alpha=(x_1,y_1,z_1)$ $\quad \beta=(x_2,y_2,z_2)$ ise

$$\alpha\wedge\beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

i- $\forall a,b\in\mathbb{R} \wedge \forall \alpha,\beta,\gamma=(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$ için

$$(a\alpha+b\beta)=(ax_1+bx_2,\, ay_1+by_2,\, az_1+bz_2)$$

$$(a\alpha+b\beta)\wedge\gamma = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ ax_1+bx_2 & ay_1+by_2 & az_1+bz_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ ax_1 & ay_1 & az_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ bx_2 & by_2 & bz_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a\alpha\wedge\gamma)+(b\beta\wedge\gamma)$$

$$\Rightarrow [a\alpha+b\beta,\gamma] = a[\alpha,\gamma]+b[\beta,\gamma]$$

b- $\alpha\wedge(a\beta+b\gamma) \overset{?}{=} a\alpha\wedge\beta + b\alpha\wedge\gamma$

ii-
$$\alpha\wedge\beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\beta\wedge\alpha$$

iii- $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = \cancel{\langle\alpha,\gamma\rangle\beta} - \cancel{\langle\alpha,\beta\rangle\gamma}$? ???

$\quad\beta\wedge(\gamma\wedge\alpha) = \cancel{\langle\beta,\alpha\rangle\gamma} - \cancel{\langle\beta,\gamma\rangle\alpha}$

$\quad\gamma\wedge(\alpha\wedge\beta) = \cancel{\langle\gamma,\beta\rangle\alpha} - \cancel{\langle\gamma,\alpha\rangle\beta}$

+

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)+\beta\wedge(\gamma\wedge\alpha)+\gamma\wedge(\alpha\wedge\beta)=0$$

O halde $\wedge$: bir lie operatörüdür.

Teorem: $X, Y, Z \in \chi(E^n)$ vektör alanları C^∞ sınıfından ise

i- $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$

ii- $X_p(\langle Y, Z\rangle) = \langle D_X Y, Z\rangle|_p + \langle Y, D_X Z\rangle|_p$

Burada $p \in E^n$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

ve $\langle Y, Z\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$.

ispat// i- $D_{X_p} Y = D_{X_p}(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$= (X_p[y_1], X_p[y_2], \dots, X_p[y_n])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_p[y_i] e_i|_p = \sum_{i=1}^{n} X_p[y_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$D_{Y_p} X = D_{Y_p}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (Y_p[x_1], Y_p[x_2], \dots, Y_p[x_n])$$

$\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ ve $p \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow [X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Yf = \langle Y, \nabla f\rangle \quad , Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \qquad , \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) \\ \Rightarrow \langle Y, \nabla f\rangle = y_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \\ \qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot y_i \rightarrow \text{koordinat fonksiyonları} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow [X, Y]_p(f) = X_p\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} y_i\right) - Y_p\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_p\left(\frac{\partial f}{\partial u_i} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} Y_p\left(\frac{\partial f}{\partial u_i} x_i\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(X_p\left[\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] y_i + \frac{\partial f}{\partial u_i} X_p[y_i]\right)}_{\text{Birinci kısım}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_p\left[\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] x_i + \frac{\partial f}{\partial u_i} Y_p[x_i]\right)}_{\text{ikinci kısım}}$$

$$\left\{ X_p\left[\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] = \left\langle X_p, \nabla \frac{\partial f}{\partial u_i}\right\rangle \right.$$

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_i}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial u_n \partial u_i}\right) \qquad X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)|_p$$

$$\Rightarrow X_p\left[\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] = x_1\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_i} + x_2\frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_i} + \cdots + x_n\frac{\partial^2 f}{\partial u_n \partial u_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} x_j$$

$\Rightarrow$ Bunu yerine yazarsak,

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}x_j\right)y_i + \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\cdots\cdots \right.\right.$$

$$X_p[y_i] = \langle X_p, \nabla y_i\rangle \qquad X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\nabla y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y_i}{\partial u_n}\right)$$

$$\Rightarrow X_p[y_i] = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial y_i}{\partial u_j}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}x_j\right)y_i + \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)\right)}_{\text{Birinci kısım.}} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}y_j\right)x_i + \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}x_j y_i - \frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}y_j x_i + \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(x_j\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(y_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial y_i}{\partial u_j} - y_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$\Rightarrow \quad [X,Y]_p(f) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial y_i}{\partial u_j} - y_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$[X,Y]_p = \sum_{i,j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial y_i}{\partial u_j} - y_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

$$D_{X_p}Y - D_{Y_p}X = (X_p[y_1], \dots, X_p[y_n]) - (Y_p[x_1], \dots, Y_p[x_n])$$

$$X_p[y_1] = \langle X_p, \nabla y_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial y_1}{\partial u_i}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial y_1}{\partial u_i}, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial y_n}{\partial u_i}\right) -$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \dots, \sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial y_j}{\partial u_i} - y_i \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad \begin{matrix} i=j \\ j=1 \end{matrix} \text{ alınırsa,}$$

$$\Rightarrow D_{X_p} Y - D_{Y_p} X = [X, Y](p) \quad //$$

ispat // ii- $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\quad Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

$\Rightarrow \langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$. (Bu iç çarpımın yöne göre türevi ?)

$$X_p \langle Y, Z \rangle = X_p \left(\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_p (y_i z_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_p[y_i] z_i + y_i X_p[z_i] \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_p[y_i] z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i X_p[z_i]$$

$$= \langle (X_p[y_1], X_p[y_2], \dots, X_p[y_n]), (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle + \sum_{i=1}^{n} y_i X_p[z_i]$$

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_{X_p} Y, Z \rangle + \langle Y, D_{X_p} Z \rangle \quad //$$

$\{ D_{X_p} Y = (X_p[y_1], \dots, X_p[y_n])$

Problemler

1- $\vec{V} = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$, $P = (1, 1, 1) \in E^3$ olduğuna göre;

a- Yöne göre türev tanımından yararlanarak

i- $f = x_2^2 x_3$ $\quad$ ii- $f = x_1^2$ $\quad$ iii- $f = e^{x_1} \cos x_2$

fonksiyonlarının $\vec{V_P}$ yönündeki türevlerini bulun.

b- Bu türevleri, yöne göre türevin özelliklerinden yararlanarak bulun.

2- E^3 de $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemine göre $X, Y \in \chi(E^3)$,

$X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\quad Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

vektör alanları ve $f, g \in C(E^3, \mathbb{R})$ fonksiyonları,

$f = x_1 x_3$, $g = x_3^3$ olarak veriliyor.

a- $X(f)$ $\quad$ b- $X(g)$ $\quad$ c- $X(fg)$ $\quad$ d- $f X(g) - g X(f)$

e- $X(Xf)$ $\quad$ f- $X(Yf)$ $\quad$ g- $Y(Xf)$ $\quad$ h- $X(f X(g))$

3- E^2 de $p=(x_1,x_2)$ olmak üzere

a- $X(P)=(P;(x_2,-x_1))$

b- $X(P)=(P;(x_2,x_1))$

c- $X(P)=(P;(-x_1,-x_2))$

d- $X(P)=(P;(-2x_2,\frac{x_1}{2}))$

vektör alanları veriliyor. $P=(1,1)$ olması halinde, tanjant vektörleri çiziniz.

4- a- $X(x_1,x_2)=(x_2,-x_1)$

b- $X(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$, olan vektör alanlarının $(-1,1)$ noktasından geçen integral eğrilerini bulun.

5- $\vec{v}=(-2,1,3)$, $\vec{u}=(0,2,1)\in\mathbb{R}^3$ vektörleri veriliyor.

$P=(1,1,1)\in E^3$ noktası için;

a- $2\vec{v}_P+5\vec{u}_P$ tanjant vektörünü,

b- $-\vec{v}_P$, $\vec{v}_P-\vec{u}_P$, $\vec{v}_P+\vec{u}_P$, $2\vec{v}_P$, $-4\vec{u}_P$ tanjant vektörlerinin, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P\right\}$ bazına göre ifade edin.

6- E^3de iki X ve Y vektör alanı olsun.

$X=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y=2x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2^3\frac{\partial}{\partial x_3}$ ve $Y-\frac{1}{x_1}X$

vektör alanlarının $P=(1,-1,1)\in E^3$ noktasındaki değerlerini bulun.

7- a- $2x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1}=7X+x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$

b- $X_P=(p_1,p_3,-p_1)|_P$, $P=(p_1,p_2,p_3)\in E^3$

c- $X_P=(1+p_1,p_2p_3,p_2)|_P$, $P=(p_1,p_2,p_3)$

olan X vektör alanının $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\,\Big|\, 1\le i\le 3\right\}$ bazına göre yazın.

8- $X=x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$

$Y=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2^2\frac{\partial}{\partial x_3}$

vektör alanları veriliyor. $fX-gY$ vektör alanının sadece $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_3}$ cinsinden verilebilmesi için, f ve g fonksiyonlarının sağladığı bağıntıyı bulun.

9- $X = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Z = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}$

vektör alanlarının $\forall P \in E^3$ noktasında lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Çözümler

1-a $\vec{V} = (1,0,-1)^{\in \mathbb{R}^3}$, $P = (1,1,1)^{\in E^3}$, $f = x_2^2 x_3$

$\vec{V}_P[f] = \frac{d}{dt} f(P + t\vec{V})\Big|_{t=0}$ $\qquad f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longrightarrow f(X) = (x_1, x_2, x_3)$

$P + t\vec{V} = (1,1,1) + t(1,0,-1) = (\overset{x_1}{1+t}, \overset{x_2}{1}, \overset{x_3}{1-t})$

$f(P + t\vec{V}) = 1^2 . (1-t) = (1-t)$

$\frac{d f(P+t\vec{V})}{dt} = -1 \qquad \vec{V}_P[f] = \frac{d}{dt} f(P+t\vec{V})\Big|_{t=0} = -1$ //

b- $\vec{V}_P[f] = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f \rangle |_P = \langle (1,0,-1), (0,2,1) \rangle = -1$ //

$\vec{\nabla} f = (0, 2x_2 x_3, x_2^2) \qquad \vec{\nabla} f|_P = (0,2,1)$

2- $X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

$f = x_1 x_3$, $g = x_3^3$

$f, g : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$X, Y : E^3 \longrightarrow \bigcup_{P \in E^3} T_P(E^3)$

$P \longrightarrow X_P$

a- $X(f)(P) = X_P[f] = \langle X_P, \nabla f|_P \rangle$ (yöne göre türev) $\quad \{ X(f) = \langle X, \nabla f \rangle$ (vek. alanına göre türev.)

$X = (x_2^2, 0, -x_1) \qquad Y = (x_1, -x_1 x_2, -x_3)$

$\nabla f = (x_3, 0, x_1)$

$X(f) = \langle X, \nabla f \rangle = x_2^2 x_3 + 0.0 + (-x_1) x_1 = x_2^2 x_3 - x_1^2$ //

c- $X(fg) = X(x_1 x_3 . x_3^3) = X(x_1 x_3^4) = \langle X, \nabla(x_1 x_3^4) \rangle$

$= \langle (x_2^2, 0, -x_1), (x_3^4, 0, 4x_1 x_3^3) \rangle$

$= x_2^2 x_3^4 - 4x_1^2 x_3^3$ //

e- $X(Xf) = X(\langle X, \nabla f \rangle) = \langle X, \nabla(\langle X, \nabla f \rangle) \rangle$

$= \langle X, \nabla(x_2^2 x_3 - x_1^2) \rangle$

$= \langle (x_2^2, 0, -x_1), (-2x_1, 2x_2x_3, x_2^2) \rangle$

$= x_2^2(-2x_1) + 0 + (-x_1)x_2$

$= -2x_1x_2^2 - x_1x_2^2 = -3x_1x_2^2$ //

f- $X(Yf) = ?$

$Yf = Y(f) = \langle Y, \nabla f \rangle = \langle (x_1, -x_1x_2, -x_3), (x_3, 0, x_1) \rangle$

$= (x_1x_3 + 0 - x_3x_1)$

$= 0$

$X(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{Yf}}) = X(0) = 0$ //

h- $Y(fX(g)) \overset{?}{=} Y(f)X(g) + fY(Xg)$

$X(g) = \langle X, \nabla g \rangle = \langle (x_2^2, 0, -x_1), (0, 0, 3x_3^2) \rangle$

$= -3x_1x_3^2$ //

$Y(f(-3x_1x_3^2)) = Y((x_1x_3)(-3x_1x_3^2)) = Y(-3x_1^2x_3^3)$

$\langle Y, \nabla(-3x_1^2x_3^3) \rangle = \langle (x_1, -x_1x_2, -x_3), (-6x_1x_3^3, 0, -9x_1^2x_3^2) \rangle$

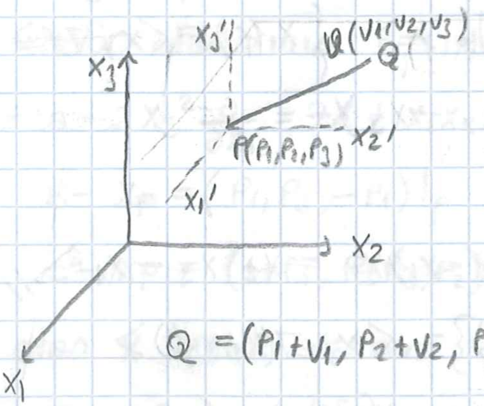
$= -6x_1^2x_3^3 + 0 + 9x_1^2x_3^3$

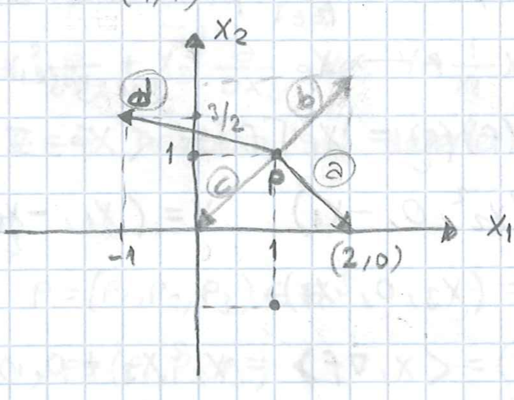
$= 3x_1^2x_3^3$

3- $P = (x_1, x_2)$ $\quad X(P) = \vec{X_P}$

a- $X(P) = \vec{X_P} = (P; (x_2, -x_1))$ $\quad P = (1,1)$

$X(P) = \vec{X_P} = (P; (1, -1))$





$Q = (P_1 + v_1, P_2 + v_2, P_3 + v_3)$

d- $X(P) = (P; -2x_2, \frac{x_1}{2})$ $\quad P = (1,1) \rightarrow Q = (-1, 3/2)$

$\vec{X_P} = ((1,1); (-2, \frac{1}{2}))$

Hatırlatma

integral eğrisi: E^n de bir X vektör alanı, 19.11.1995 PAZAR

α, E^n de bir eğri.

$$X : E^n \longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_P(E^n)$$
$$P \longrightarrow X(P) = \vec{X_P} \qquad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

$$I \xrightarrow{\alpha} E^n \xrightarrow{X} \bigcup_{P\in E^n} T_P(E^n)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{X\circ\alpha}$$

$\forall t \in I$ için $(X\circ\alpha)(t) = X(\alpha(t)) = \dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ ise

$X(\alpha(t)) = \dfrac{d(\alpha(t))}{dt}$ ise bu takdirde α eğrisi,

X vektör alanının bir integral eğrisidir, diyoruz.

4 - a) $X(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ $\qquad (-1, 1)$

$\alpha : I \longrightarrow E^2$ eğrisi

$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ olsun.

$$X(\alpha(t)) = X(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (\alpha_2(t), -\alpha_1(t))$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}\right) = (\alpha_2, -\alpha_1)$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 \wedge \frac{d\alpha_2}{dt} = -\alpha_1 \qquad \left\{\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = y \text{ dersek}\right\}$$

$$\left\{\frac{dx}{dt} = y \wedge \frac{dy}{dt} = -x\right\}$$

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = \frac{d\alpha_2}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1'' + \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_1 = e^{\lambda t} \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \mp i$$

$$\alpha_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t \ //$$

$$\alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{dt} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \ //$$

$\Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$

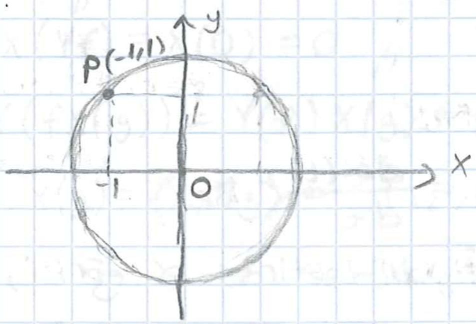
$\alpha(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t, -c_1 \sin t + c_2 \cos t)$

$P=(-1,1)$ den geçen integral eğrisi için,

$t=0 \Rightarrow \alpha(0) = (-1,1)$

$\Rightarrow \alpha(0) = (c_1, c_2) = (-1,1) \Rightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 1$

$\alpha(t) = (-\cos t + \sin t, \sin t + \cos t)$



b- $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ $(-1,1)$

$X(\alpha(t)) = X(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (\alpha_2(t), \alpha_1(t))$

$\frac{d(\alpha(t))}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\right)$

$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}\right) = (\alpha_2, \alpha_1)$

$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 \wedge \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1$

$\frac{d^2\alpha_1}{dt} = \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1$

$\Rightarrow \alpha_1'' - \alpha_1 = 0$ $\alpha_1 = e^{\lambda t}$ $\lambda^2 - 1 = 0$ $\lambda = \mp 1$

$\alpha_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ //

$\alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{dt} = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$ //

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$

$= (c_1 e^t + c_2 e^t, c_1 e^t - c_2 e^{-t})$

$t=0 \Rightarrow \alpha(0) = (-1,1)$

$\alpha(0) = (c_1 + c_2, c_1 - c_2) = (-1,1) \Rightarrow c_1 + c_2 = -1 \wedge c_1 - c_2 = 1$

$c_1 + c_2 = -1$
$c_1 - c_2 = 1$

$2c_1 = 0 \quad c_1 = 0 \quad c_2 = -1$

$\alpha(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$

5- $\vec{v} = (-2,1,3)$, $\vec{u} = (0,2,1)$, $P = (1,1,1)$

$\vec{v}_P + \vec{u}_P = (P,\vec{v}) + (P,\vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u})$

$\lambda \odot \vec{v}_P = \lambda(P,\vec{v}) = (P, \lambda\vec{v})$

a- $2\vec{v}_P + 5\vec{u}_P = 2(P,\vec{v}) + 5(P,\vec{u})$

$= (P, 2\vec{v}) + (P, 5\vec{u})$

$= (P, 2\vec{v} + 5\vec{u})$

$= ((1,1,1), (-4,12,11))$

$= -4\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + 12\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P + 11\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P$

$= -4\vec{e_1}|_P + 12\vec{e_2}|_P + 11\vec{e_3}|_P$

$\left\{ \begin{array}{l} 2\vec{v} + 5\vec{u} = (-4,2,6) \\ \quad + (0,10,5) \\ \quad = (-4,12,11) \end{array} \right\}$

6- $X = x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = 2x_1^2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_2^3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$, $Y - \dfrac{1}{x_1}X$

$P = (1,-1,1) \in E^3$?

$\left\{ \begin{array}{ll} (x_1,x_2,x_3) , & x_i : E^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & P = (P_1,P_2,P_3) \longrightarrow x_i(P) = P_i \end{array} \right\}$

- $X(P) = \vec{X}_P = \left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)(P)$

$= \left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)(P) - \left(x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)(P)$ (aynı anlamda)

$= x_1(P)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - x_2(P)\dfrac{\partial}{\partial x_2}(P)$

$= 1.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - (-1)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P = \vec{e_1}|_P + \vec{e_2}|_P$ //

- $Y(P) = \vec{Y}_P = \left(2x_1^2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_2^3\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)(P)$

$= \left(2x_1^2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)(P) + \left(x_2^3\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)(P)$

$= 2\vec{e_1}|_P - \vec{e_3}|_P$ //

$$\left(Y-\frac{1}{x_1}X\right)(P) = Y(P)-\left(\frac{1}{x_1}X\right)(P)$$
$$= \vec{Y_P}-\frac{1}{x_1(P)}\vec{X_P}$$
$$= 2\vec{e_2}|_P-\vec{e_3}|_P-(\vec{e_1}|_P+\vec{e_2}|_P)$$
$$= \vec{e_1}|_P+\vec{e_2}|_P-\vec{e_3}|_P \quad //$$

7- a- $2x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1} = 7X + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$ $\longrightarrow$ koordinat fonk.

$\hookrightarrow$ vektör alanı

$$7X = 2x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{2}{7}x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{7}x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \quad //$$

b- $X(P) = (p_1, p_3, -p_1)|_P \qquad P=(p_1,p_2,p_3)\in E^3 \qquad X=?$

(x_1,x_2,x_3) sistemine göre,

$x_1(P)=p_1 \;,\; x_2(P)=p_2 \;,\; x_3(P)=p_3$

$$X(P)=\vec{X_P} = (x_1(P), x_3(P), -x_1(P))$$
$$= (x_1, x_3, -x_1)|_P$$
$$X = (x_1, x_3, -x_1)$$
$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} \quad //$$

c- $\vec{X_P} = X(P) = (1+p_1,\ p_2p_3,\ p_2)|_P \qquad P=(p_1,p_2,p_3)\in E^3$

$$X(P) = (1+x_1(P),\ x_2(P)x_3(P),\ x_2(P))$$
$$X = (1+x_1,\ x_2x_3,\ x_2)$$
$$X = (1+x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

8- $X = x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \;,\; Y = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2^2\frac{\partial}{\partial x_3}$

$fX - gY \;,\; \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$; f ve g arasındaki bağıntı ?

$f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$g: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$fX-gY=(fx_2^2-gx_3)\frac{\partial}{\partial x_1}+(-fx_1^2+gx_1)\frac{\partial}{\partial x_2}+(fx_1x_2+gx_2^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$\Rightarrow fx_2^2-gx_3=0$ olmalıdır. //

9- $X=\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Z=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}$

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$ bağıntısı ancak ve ancak $\alpha=\beta=\gamma=0$ için sağlanıyorsa, bu vektörlere lineer bağımlı denir.

$\forall P\in E^3$ için $(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)(P)=0$ $\left\{\begin{array}{l} x_1(P)=p_1\\ x_2(P)=p_2\\ x_3(P)=p_3\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \alpha\vec{X}_P+\beta\vec{Y}_P+\gamma\vec{Z}_P=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(P)+\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(P)+\gamma\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(P)=0$$

$$\Rightarrow \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P-\alpha x_1(P)\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P+\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P+\gamma x_1(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P+\gamma\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P=0$$

$$\Rightarrow (\alpha+\gamma p_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P+\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P+(-\alpha p_1+\gamma)\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\gamma p_1=0\\ \beta=0\\ -\alpha p_1+\gamma=0\end{array}\right\}\text{olmalıdır.}\qquad \begin{vmatrix}1&0&p_1\\0&1&0\\-p_1&0&1\end{vmatrix}=1+p_1^2\neq 0 \\ >0$$

O halde $\alpha=\beta=\gamma=0$ tek çözümdür.

Sonuç olarak bu vektörler lineer bağımsızdır. //

Öklid Uzayının Kotanjant Vektörleri

Kotanjant Uzay

1-Formlar

Tanım: Dual Uzay (Bir Vektör Uzayının Duali):

Vektör Uzayı: $(V,\oplus)$ bir abel grubu olsun. (hatırlatma)

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ bir cisimdir.

$(V,\oplus,(\mathbb{R},+,\cdot),\odot)$ $\quad \mathbb{R}\times V\to V$, $(\lambda,\alpha)\to(\lambda\odot\alpha)$

1° $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha,\beta\in V$

1° $(\lambda+\mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$

2° $\lambda(\alpha+\beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

3° $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$

4° $1.\alpha = \alpha$

ise V kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Veya V bir reel vektör uzayıdır denir.

$$\phi : V \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}$$
$$\alpha \longrightarrow \phi(\alpha) \text{ fonksiyonu}$$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ için ve $\forall \alpha,\beta \in V$ için,

$\phi(a\alpha + b\beta) = a\phi(\alpha) + b\phi(\beta)$ ise veya

$\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$ ve $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$ ise,

ϕ'ye bir lineer fonksiyon denir.

$$V^* = \{\phi : \phi : V \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

kümesini düşünelim.

Tanım: (Toplama): $\forall \phi, w \in V^*$ için $\phi \oplus w$ toplamı, $\alpha \in V$ olmak üzere;

$$(\phi + w)(\alpha) = \phi(\alpha) + w(\alpha)$$

olarak tanımlanıyor.

Tanım: (Skalerle Çarpma): $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için, $\vartheta \in V$ olmak üzere,

$$(\lambda \odot \phi)(\vartheta) = \lambda\phi(\vartheta)$$

olarak tanımlanıyor.

Teorem: $(V^*, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot)$ bir vektör uzayıdır.

Öğretmenler Günü
95

$T_{E^n}(P) = T_P(E^n)$ $\quad P \in E^n$

$\downarrow$

E^n in P noktasındaki tanjant uzayı.

$T_M(P) = T_P(M)$ $\quad P \in M$

$\downarrow$

M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı.

Tanım: E^n öklid uzayının $P\in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_P(E^n)$ olsun. Bu tanjant uzayın dual uzayı $T_P^*(E^n)$,

$$T_P^*(E^n)=\{\phi \mid \phi: T_P(E^n) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

olsun.

Toplama İşlemi : $\oplus : T_P^*(E^n)\times T_P^*(E^n) \longrightarrow T_P^*(E^n)$

$$(\phi, w) \longrightarrow \phi \oplus w = \phi + w$$

fonksiyonu, $\forall P\in E^n \wedge \vec{v}_P \in T_P(E^n)$ için,

$$(\phi \oplus w)(\vec{v}_P) = \phi(\vec{v}_P) + w(\vec{v}_P)$$

olarak tanımlanıyor.

Skalerle Çarpma İşlemi :

$$\odot : \mathbb{R}\times T_P^*(E^n) \longrightarrow T_P^*(E^n)$$

$$(\lambda, \phi) \longrightarrow \lambda \odot \phi = \lambda\phi$$

fonksiyonu, $\forall P\in E^n \wedge \forall v_P \in T_P(E^n)$ için,

$$(\lambda \odot \phi)(\vec{v}_P) = \lambda \phi(\vec{v}_P)$$

olarak tanımlanıyor.

Teorem : $\{T_P^*(E^n), \oplus, \{\mathbb{R}, +, \cdot\}, \odot\}$ bir vektör uzayıdır. (ödev)

Bu vektör uzayına, ($T_P^*(E^n)$ uzayına) $T_P(E^n)$ tanjant uzayının dual uzayı denir. (Kotanjant uzayı da denir.)

Tanım : (1- Formlar) :

1^0) Vektör Alanı : $X: E^n \longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_P(E^n)$

$$P \longrightarrow X(P) = \vec{X}_P$$

2^0) $w: E^n \longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_P^*(E^n)$

$P \longrightarrow w(P) = w_P$ şeklinde tanımlı w fonksiyonuna E^n üzerinde bir 1-Form denir.

E^n in herbir noktasına w_P lineer fonksiyonu tanımlandığında w, $T_P^*(E^n)$ de tanımlı lineer 1-form dur.

w_P fonksiyonu $\forall \vec{v}_P, \vec{u}_P \in T_P(E^n)$ için ve $\forall a,b \in \mathbb{R}$;

$$w_P(a\vec{v}_P + b\vec{u}_P) = a\,w_P(\vec{v}_P) + b\,w_P(\vec{u}_P)$$

Tanım: Bu w fonksiyonlarının kümesini $\chi^*(E^n)$ ile gösterelim.

Toplama İşlemi: $\oplus : \chi^*(E^n) \times \chi^*(E^n) \longrightarrow \chi^*(E^n)$

$$(w,\phi) \longrightarrow w \oplus \phi$$

işlemi, $\forall P \in E^n$ için, $(w \oplus \phi)(P) = w_P + \phi_P$ olarak verilsin.

Skalerle Çarpma İşlemi:

$$\odot : \mathbb{R} \times \chi^*(E^n) \longrightarrow \chi^*(E^n)$$

$$(\underbrace{\lambda}_{\text{reel sayı}}, \underbrace{w}_{\text{1-form}}) \longrightarrow \lambda \odot w$$

işlemi, $\forall P \in E^n$ için, $(\lambda \odot w)(P) = \lambda w_P$ olarak tanımlanıyor.

Teorem: $(\chi^*(E^n), \oplus, (\mathbb{R},+,\cdot), \odot)$ bir vektör uzayıdır.

Tanım: $\chi^*(E^n)$ uzayına, 1-formların uzayı denir.

Tanım: (1-Formların Fonksiyonlarla Çarpımı)
reel değerli

$f : E^n \xrightarrow[\text{1.Mer.}]{\text{dif. bilir}} \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f(P)$, $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun.

$w \in \chi^*(E^n)$ olsun. (w, 1-Form olsun.)

$$fw : C(E^n, \mathbb{R}) \times \chi^*(E^n) \longrightarrow \chi^*(E^n)$$

fonksiyonu, $\forall P \in E^n$ ve $\forall \vec{v}_P \in T_P(E^n)$ için,

$$(fw)(\vec{v}_P) = \underbrace{f(P)}_{\text{reel sayı}}\, \underbrace{w(\vec{v}_P)}_{\text{reel sayı}}$$

şeklinde tanımlanan fw fonksiyonuna w, fonksiyonunun f ile çarpımı denir.

Tanım: (d Operatörü = Diferansiyel Operatörü):

$f : E^n \xrightarrow{\text{dif. bilir}} \mathbb{R}$, $(f \in C(E^n, \mathbb{R}))$ olsun.

$$d : C(E^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \chi^*(E^n)$$

$$f \longrightarrow df$$

fonksiyonu, $\forall V \in \chi(E^n)$ ve $\forall P \in E^n$ için,

$df(\vec{V_P}) = \vec{V_P}[f]$ tanımlanıyor.

$\Rightarrow \boxed{df = V(f)}$ (V yönünde f nin kovaryant türevi)

Bu df fonksiyonuna f nin diferansiyeli denir.

Teorem: Bir f fonksiyonunun df diferansiyeli bir 1-Formdur.

İspat// 1°) df tanjant vektörler üzerinde tanımlıdırlar.

$df : T_P(E^n) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{v_P} \longrightarrow df(\vec{v_P}) = \vec{v_P}[f]$

tanjant uzay ⟶ Reel sayılar

2°) Lineer dönüşüm olduğunu gösterelim.

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{v_P}, \vec{U_P} \in T_P(E^n)$ için ,

$df(a\vec{v_P} + b\vec{U_P}) = (a\vec{v_P} + b\vec{U_P})[f]$

$= a\,\vec{v_P}[f] + b\,\vec{U_P}[f]$

$= a\,df(\vec{v_P}) + b\,df(\vec{U_P})$ // lineerdir.

$df \in \chi^*(E^n)$ dir. (yani 1-form'dur.)

Örnek// E^n de bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koordinat sistemi veriliyor.

$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P = (P_1, P_2, ..., P_n)$

$P \longrightarrow x_i(P) = P_i$

koordinat fonksiyonlarının diferansiyeli :

$\forall \vec{v_P} \in T_P(E^n)$ için , $dx_i(\vec{v_P}) = \vec{v_P}[x_i] = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} x_i \rangle|_P$

$\vec{V} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ $\quad \vec{\nabla} x_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}, \frac{\partial x_i}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\right)$

$\langle \vec{V}, \vec{\nabla} x_i \rangle|_P = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} v_j|_P$

$= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j$ $\quad$ ($i=j$ ise)

$\Rightarrow \boxed{dx_i(\vec{v_P}) = v_i(P)}$ olur $\quad i = 1, 2, ..., n$

x_i koordinat fonksiyonlarının $\vec{v_P}$ deki diferansiyelidir.

$i=1$, $dx_1(\vec{v_P}) = v_1(P)$ ...... , $i=n$ ise $dx_n(\vec{v_P}) = v_n(P)$

Sonuç: Koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ in diferansiyelleriyle elde edilen $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ kümesi,

$\chi^*(E^n)$ in bir bazıdır.

İspat// $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \dots + \lambda_n dx_n = 0$$

bağıntısı $\forall \lambda_i = 0$ için sağlanır. Bunu gösterelim.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\chi(E^n)$ in bazını alalım. $\forall P \in E^n$ için,

$\Rightarrow (\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \dots + \lambda_n dx_n)(\vec{e_1}|_P) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 dx_1(\vec{e_1}|_P) + \lambda_2 dx_2(\vec{e_1}|_P) + \dots + \lambda_n dx_n(\vec{e_1}|_P) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{e_1}|_P[x_1] + \lambda_2 \vec{e_1}|_P[x_2] + \dots + \lambda_n \vec{e_1}|_P[x_n] = 0$

$$\begin{cases} \vec{e_1}|_P[x_1] = \langle \vec{e_1}|_P, \vec{\nabla} x_1 \rangle|_P = 1 \text{ //} \\ \vec{e_1}|_P = (1, 0, \dots, 0)|_P \quad \vec{\nabla} x_1|_P = (1, 0, \dots, 0)|_P \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 . 1 + \lambda_2 . 0 + \dots + \lambda_n . 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\vec{e_2}|_P$ için $\lambda_2 = 0$ ve benzer şekilde, $\forall \lambda_i = 0$ olur.

O halde $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$ lineer bağımsızdır ve bazdır.

yani $\chi^*(E^n)$ in bir bazıdır.

Tanım: $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$ bazına,

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bazının DUAL BAZI denir.

Teorem: E^n deki $\forall \phi$ 1-formu (yani $\phi \in \chi^*(E^n)$),

$$f_i = \phi(e_i) = \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

olmak üzere, $\phi = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i$ şeklinde yazılabilir.

İspat// $\forall P \in E^n$ ve $\forall \vec{v}_P \in T_P(E^n)$ için;

$$\vec{v}_P = \sum_{i=1}^{n} v_i(P) \vec{e_i}|_P = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{v}_P) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P\right)$$

$f_i = \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P\right) = \phi(\vec{e_i}|_P)$ olmak üzere

$$\Rightarrow \phi(\vec{v}_P) = \sum_{i=1}^{n} f_i|_P v_i|_P \qquad \{dx_i(\vec{v}_P) = v_i|_P \text{ idi}\}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{v}_P) = \sum_{i=1}^{n} f_i|_P \, dx_i(\vec{v}_P)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{v}_P) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i\right)(\vec{v}_P)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\phi = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i}_{f_i = \phi(e_i)}$$ herbir 1-formu, dx_i diferansiyel baz vektörleri cinsinden yazılmış oldu.

Öklid Uzaylarındaki Dönüşümler

E^n öklid uzayından E^m öklid uzayına fonksiyonlardan bahsedeceğiz. $(m,n \in \mathbb{Z}^+)$ ($m=n$ olabilir.)

Tanım: Bir $F: E^n \longrightarrow E^m$ fonksiyonu verilsin. $\forall P \in E^n$ için,

$F(P) = Q \qquad P = (p_1, p_2, ..., p_n) \qquad Q = (q_1, q_2, ..., q_m)$

$F(P) = (f_1(P), f_2(P), ..., f_m(P))$

$f_1(P) = q_1, \quad f_2(P) = q_2, ..., \quad f_m(P) = q_m$

olmak üzere, $f_1: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f_1(P) = q_1$ ve benzer şekilde,

$f_2: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f_2(P) = q_2$ aynı şekilde, ...

$f_m: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f_m(P) = q_m$

şeklinde tanımlı $f_1, f_2, ..., f_m$ fonksiyonlarına F'nin, ÖKLİD koordinat fonksiyonları denir.

$F = (f_1, f_2, ..., f_m)$ yazılır.

Tanım 1 – F'nin f_i koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir ise, F'ye diferansiyellenebilirdir denir.

2 – Eğer $F: E^n \longrightarrow E^m$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise F fonksiyonuna, E^n den E^m ye bir DÖNÜŞÜM denir.

E^m deki koordinat fonksiyonları, $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ olsun.

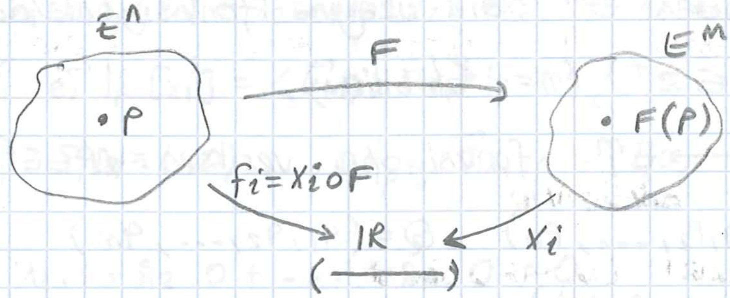
$$x_i : E^m \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , Q=(q_1,q_2,\dots,q_m)$$
$$Q \longrightarrow x_i(Q)=q_i$$

$$F: E^n \longrightarrow E^m$$
$$P \longrightarrow F(P)=(f_1,f_2,\dots,f_m)(P)=(f_1(P),f_2(P),\dots,f_m(P))$$

$$f_i: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow f_i(P)$$

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f_i"'] & E^m \arrow[d, "x_i"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f_i = x_i \circ F$ diferensiyellenebilir ise (f_i diferensiyellenebilir ise) F'ye diferensiyellenebilir fonksiyon denir.



örnek // $F: E^3 \longrightarrow E^3$
$P(x,y,z) \longrightarrow F(x,y,z)=(x^2, yz, xy)$ olarak tanımlansın.

$f_1 = x^2 \quad f_2 = yz \quad f_3 = xy$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan, F; E^3 den E^3e bir dönüşüm olur.

$Q=(q_1,q_2,q_3)$ ise

$$F(Q)=(x^2, yz, xy)(Q)$$
$$=(x^2(Q), yz(Q), (xy)(Q))$$

$$(x^2)(Q) = (xx)(Q) = x(Q)x(Q) = q_1 . q_1 = q_1^2$$

$$(yz)(Q) = y(Q)\,z(Q) = q_2 q_3$$

$$(xy)(Q) = x(Q)\,y(Q) = q_1 q_2$$

$$\Rightarrow F(Q) = (q_1^2, q_2 q_3, q_1 q_2)$$

$F(1,-2,0) = (1, 0, -2)$ olur.

$F(-3,1,3) = (9, 3, -3)$

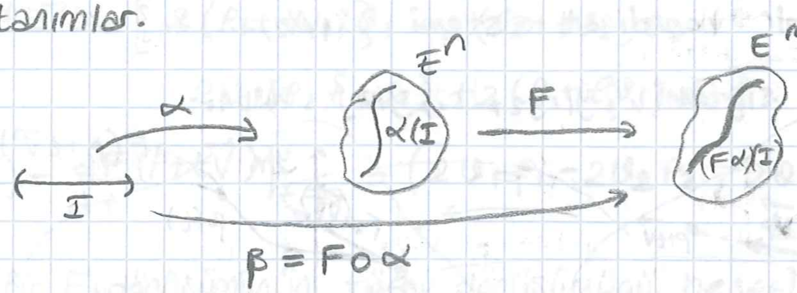
Tanım: $\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğri $\quad (I \subset \mathbb{R})$
$t \longrightarrow \alpha(t)$

ve $F: E^n \longrightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta = F\circ\alpha"'] & E^n \arrow[r, "F"] & E^m \end{tikzcd}$$

$\left\{ \right.$ F dönüşüm, α eğri olduğundan diferansiyellenebilir. Bileşkeleri de diferansiyellenebilirdir.

$\beta = F(\alpha) = F\circ\alpha : I \xrightarrow{\text{dif. bilir.}} E^m$ fonksiyonu da E^m de bir eğri tanımlar.



$(F\alpha)(I) = F(\alpha(I))$

Bu β eğrisine, α eğrisinin F dönüşümü altındaki görüntüsü denir.

Örnek // $F : E^2 \longrightarrow E^2$ dönüşümü

$$P = (u, v) \longrightarrow F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

verilsin. $f_1 = u^2 - v^2$ $\quad f_2 = 2uv$

$I = \{0, 2\pi\}$ olmak üzere $\quad \alpha : I \longrightarrow E^2$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\underbrace{r\cos t}_{x}, \underbrace{r\sin t}_{y})$$

F altındaki bu çemberin, görüntüsünü bulalım. $\forall t \in I$ için,

$$\beta(t) = (F\circ\alpha)(t) = F(\alpha(t)) = F(r\cos t, r\sin t)$$

$$= ((r\cos t)^2 - (r\sin t)^2, 2(r\cos t)(r\sin t))$$

$$= (r^2(\cos^2 t - \sin^2 t), 2r^2 \cos t \sin t)$$

$$= (r^2\cos 2t, r^2 \sin 2t)$$

$\left\{ \right.$ diğer çemberin yarıçapının iki katıdır. Çember 2 defa çizilir. $\left. \right\}$

Türev Dönüşümü : 26.11.95 C.tesi.

Tanım : $F : E^n \longrightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun.
$\quad p \longrightarrow F(P)$

$P \in E^n$ ve $\vec{V_P} \in T_P(E^n)$ için

$$F_* : T_P(E^n) \longrightarrow T_{F(P)}(E^m) \text{ dönüşümü}$$

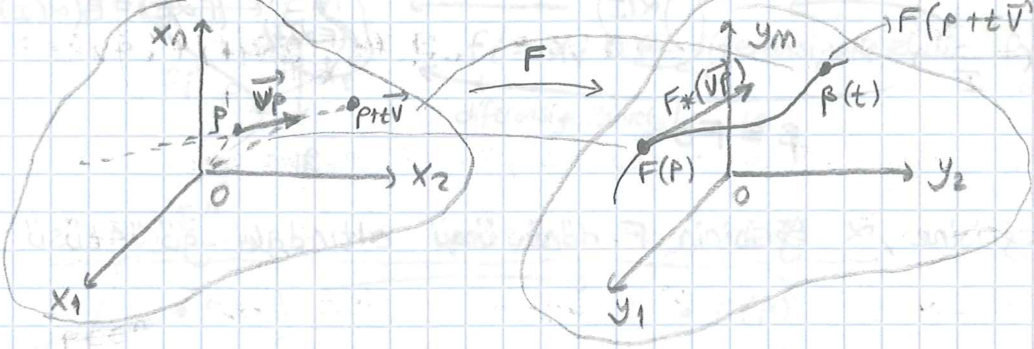
$$\vec{V_P} \longrightarrow F_*(\vec{V_P})$$

$$\boxed{F_*(\vec{V_P}) = \frac{d}{dt} F(P+t\vec{V})\Big|_{t=0}}$$ olarak tanımlanıyor.

Bu F_* dönüşümüne, F nin türev dönüşümü denir.

Geometrik yorum:

E^n de bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ve E^m de bir koordinat sistemi, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ olsun.



$P \in E^n$ ve $V_P \in T_P(E^n)$, $P+tV$ $t \in \mathbb{R}$

$\alpha(t)$, $z = P+t\vec{V}$ E^n de P den geçen doğrultmanı V olan doğru.

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = P+t\vec{V} \quad E^n \text{ de bir doğru.}$$

$$\Rightarrow F(\alpha(t)) = F(P+t\vec{V}) = \beta(t)$$

$$\beta = F \circ \alpha = F(\alpha) : I \longrightarrow E^m$$
$$t \longrightarrow \beta(t) = F(\alpha(t))$$

$$\beta(t) = F(P+t\vec{V})$$

$$t \to 0 \Rightarrow F_*(\vec{V_P}) = \frac{d}{dt} F(P+t\vec{V})\Big|_{t=0} = \frac{d\beta(0)}{dt}$$
$$= F_*(\vec{V_P})\Big|_{F(P)}$$

Örnek //
$$F : E^2 \longrightarrow E^2$$
$$(u,v) \longrightarrow F(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$$

dönüşümünün, türev dönüşümünü bulun.

$$F = (f_1, f_2) \Rightarrow f_1 = u^2 - v^2 \quad , f_2 = 2uv$$

F, türevlenebilir fonksiyondur ve dönüşüm olur.

$P = (p_1, p_2) \in E^2 \wedge \vec{V} = (v_1, v_2)$ alalım.

$$F_*(\vec{V_P}) = \frac{d}{dt} F(P+t\vec{V})\Big|_{t=0}$$

$$P+t\vec{V} = (P_1,P_2) + t(\vec{V_1},\vec{V_2})$$

$$= (\underbrace{P_1+t\vec{V_1}}_{U}, \underbrace{P_2+t\vec{V_2}}_{V})$$

$$F(P+t\vec{V}) = \left((P_1+tV_1)^2-(P_2+tV_2)^2,\ 2(P_1+tV_1)(P_2+tV_2)\right)$$

$$\frac{dF}{dt}(P+t\vec{V}) = \left[\, 2(P_1+tV_1)v_1 - 2(P_2+tV_2)v_2,\ 2v_1(P_2+tV_2)+2(P+tv_1)v_2 \right]$$

$$F_*(\vec{V_P}) = \frac{dF(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0} = (2v_1P_1-2v_2P_2,\ 2v_1P_2+2v_2P_1)$$

Teorem: (Bir F dönüşümünün türev dönüşümünü hesaplama)

$F: E^n \longrightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun. $F=(f_1,f_2,\dots,f_m)$

$P\in E^n$ noktasındaki bir $\vec{V_P}$ tanjant vektörü için,

$$F_*(\vec{V_P}) = (\vec{V_P}[f_1], \vec{V_P}[f_2],\dots,\vec{V_P}[f_m])\Big|_{F(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \vec{V_P}[f_i]e_i\Big|_{F(P)} = \sum_{i=1}^{m} \vec{V_P}[f_i]\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(P)}$$

İspat// $\beta: t \longrightarrow F(P+t\vec{V}) = \beta(t)$

$$\beta(t) = F(P+t\vec{V}) = (f_1,f_2,\dots,f_m)(P+t\vec{V})$$

$$= (f_1(P+t\vec{V}), f_2(P+t\vec{V}),\dots, f_m(P+t\vec{V}))$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \left(\frac{df_1(P+t\vec{V})}{dt}, \frac{df_2(P+t\vec{V})}{dt},\dots,\frac{df_m(P+t\vec{V})}{dt}\right)$$

$$F_*(\vec{V_P}) = \frac{d\beta(0)}{dt} = \frac{dF(P+tV)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{df_1(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{df_2(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0},\dots,\frac{df_m(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0}\right)$$

$$\frac{df(P+t\vec{V})}{dt}\Big|_{t=0} = \vec{V_P}[f] \quad \text{idi.}$$

$$\Rightarrow F_*(\vec{V_P}) = (\vec{V_P}[f_1], \vec{V_P}[f_2],\dots,\vec{V_P}[f_m])\Big|_{F(P)}$$

Örnek// $F: E^2 \longrightarrow E^3$ dönüşümü E^2 deki bir $\{x_1,x_2\}$ koordinat sistemine göre,

$F(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1x_2)$ olarak tanımlanıyor.

$\vec{V_P} = (1,0)\big|_P$ olsun. $F_*(\vec{V_P}) = ?$

$f_1 = x_1 \quad f_2 = x_2 \quad f_3 = x_1 x_2$

$F_*(\vec{V_p}) = (\vec{V_p}[f_1], \vec{V_p}[f_2], \vec{V_p}[f_3])$

$\vec{V_p}[f_1] = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f_1 \rangle |_p = \langle (1,0), (1,0) \rangle |_p = 1$

$\vec{V_p}[f_2] = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f_2 \rangle |_p = \langle (1,0), (0,1) \rangle |_p = 0$

$\vec{V_p}[f_3] = \langle \vec{V}, \vec{\nabla} f_3 \rangle |_p = \langle (1,0), (x_2, x_1) \rangle |_p = x_2(p)$

$F_*(\vec{V_p}) = (1, 0, x_2(p)) |_{F(p)}$

$\{x_1, x_2\}$ E^2 deki koordinat sistemi ve

$\{y_1, y_2, y_3\}$ E^3 deki koordinat sistemi ise,

$F_*(\vec{V_p}) = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(p)} + x_2(p) \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{F(p)}$

koordinat sistemleri cinsinden yazılmış olur. //

Teorem: $F: E^n \longrightarrow E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü

$\forall p \in E^n$ noktasında,

$$F_*: T_p(E^n) \longrightarrow T_{F(p)}(E^m)$$

şeklinde, lineer bir dönüşümdür.

İspat// $\forall p \in E^n$ noktasında $\forall \vec{v_p}, \vec{U_p} \in T_p(E^n)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için,

$F_*(a\vec{v_p} + b\vec{U_p}) = a F_*(\vec{v_p}) + b F_*(\vec{U_p})$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ise $\sum_{i=1}^{m} f_i \frac{\partial}{\partial y_i} = F$ dur.

$$\Rightarrow F_*(a\vec{v_p} + b\vec{U_p}) = ((a\vec{v_p} + b\vec{U_p})[f_1], \dots, (a\vec{v_p} + b\vec{U_p})[f_m])|_{F(p)}$$
$$= ((a v_p[f_1] + b U_p[f_1]), \dots, (a v_p[f_m] + b \vec{U_p}[f_m]))|_{F(p)}$$
$$= [a(v_p[f_1], \dots, v_p[f_m]) + b(U_p[f_1], \dots, U_p[f_m])]|_{F(p)}$$
$$= a F_*(\vec{v_p}) + b F_*(\vec{U_p}) \;//$$

F_* lineer dönüşüm olur.

Teorem: (Türev dönüşümünün matrislerle nasıl ifade edileceğini veren teoremdir.)

E^n de bir koordinat sistemi, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve E^m de bir koordinat sistemi $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olsun.

$F: E^n \longrightarrow E^m$ dönüşümü ve $P \in E^n$ noktası verildiğinde,

$$\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\Big|_P = (e_1, e_2, \dots, e_n)\big|_P$$

$$\phi = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\right)\Big|_{F(P)} = (E_1, E_2, \dots, E_m)\big|_{F(P)}$$

olmak üzere,

$$F_*(e_j|_P) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\, E_i(F(P))$$

$F = (f_1, f_2, \dots, f_m) \qquad j = 1, 2, \dots, n$

$$\left(\text{veya } F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_P\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(P)}\right)$$

İspat// $P \in E^n$ için $F_*(\vec{v}_P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_P[f_i]\, E_i\big|_{F(P)}$

olduğunu biliyoruz. $\vec{v}_P = e_j|_P$ alınırsa,

$$\Rightarrow F_*(e_j|_P) = \sum_{i=1}^{n} e_j|_P[f_i]\, E_i\big|_{F(P)}$$

$$e_j|_P[f_i] = \langle \vec{e}_j, \vec{\nabla} f_i \rangle|_P$$

$$e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{ij}, \dots, \delta_{nj})$$

$$\nabla f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{e}_j, \vec{\nabla} f_i \rangle|_P = \left(\delta_{1j}\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \delta_{2j}\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + \delta_{nj}\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)\Big|_P$$

$$= \underbrace{\delta_{jj}}_{1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_P = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_P$$

O halde, $F_*(\vec{e}_j|_P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_P E_i\big|_{F(P)} \qquad j = 1, 2, \dots, n$

Sonuç :
$$F_*(e_1)_{(P)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Big|_P E_i\big|_{F(P)}$$
$$F_*(e_2)(P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\Big|_P E_i\big|_{F(P)}$$
$$\vdots$$
$$F_*(e_n)_{(P)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Big|_P E_i\big|_{F(P)}$$

$$F_*\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_P = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{n \times m} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}_{F(P)}$$

$i = 1, 2, \dots, m$
$j = 1, 2, \dots, n$

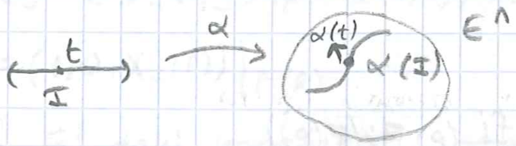
Tanım : $F: E^n \longrightarrow E^m$ fonksiyonunun

türev dönüşümüne karşılık gelen

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n \times m}$$

matrisine, bu dönüşümün Jakobiyeni denir. 1.12.1995/Cuma

Eğriler : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ şeklindeki bir α fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyona eğri diyoruz.



$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i- $I = (a, b)$ ii- $(a, +\infty) = I$ iii- $(-\infty, b) = I$ ve

iv- $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ olabilir.

$\forall t \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$

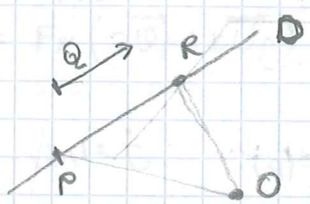
Tanım : (E^n de eğri): E^n de bir eğri diye,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$ diferansiyellenebilir fonksiyona denir.

Eğrinin geometrik yorumu üzerinde inceleme yapacağız.

t: parametre , I: parametre aralığı.

Örnek// **Doğru :** E^n de $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ noktasından geçen ve $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi



$R = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$

$\vec{OR} = \vec{OP} + t\vec{Q}$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, \ldots, p_n + tq_n)$

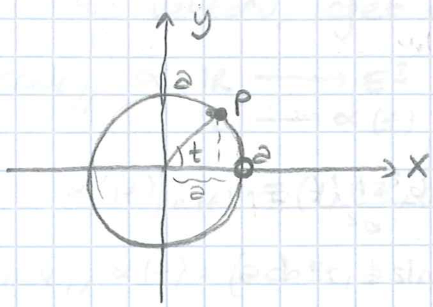
$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, \ldots, p_n + tq_n) \end{aligned}$$

$I = \mathbb{R}$ olabilir.

Doğru, E^n de bir eğridir.

Örnek // $\alpha: I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ a = sabit

$a>0$ Çember denklemidir.

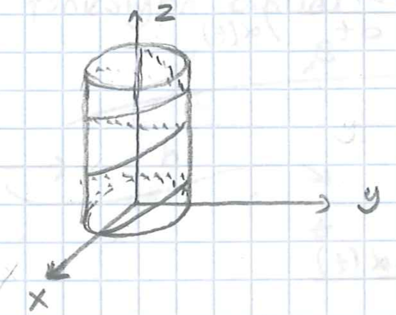


$I = (0, 2\pi)$

Örnek // $a>0 \wedge b \neq 0$ a,b = sabit olmak üzere

$\alpha: I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

eğrisi dairesel (silindirik) helis olarak bilinir.



Örnek // $\alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$, $0 < t \leq \pi/2$

$I = (0, \pi/2)$ $\alpha: I \longrightarrow E^3$

bu gösterim, eğrinin parametrik gösterimidir.

Örnek // $y = x^2$ parabolünün bir parametrik gösterimini bulalım.

$y = x^2$, $z = 0$ $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

$x = t$, $y = t^2$; $\alpha(t) = (t, t^2)$ olur. Eğer ;

$x = t^3 \Rightarrow y = t^6$; $\alpha(t) = (t^3, t^6)$ olurdu.

Örnek // $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin bir parametrik gösterimini bulalım.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$

$x = at \Rightarrow \dfrac{a^2t^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2(1-t^2)$

$y = \mp b\sqrt{1-t^2}$

$\Rightarrow \alpha(t) = (at, \mp b\sqrt{1-t^2})$

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ise

$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$

örnek // $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$ $\qquad \dfrac{a^2\mathrm{ch}^2t}{a^2} - \dfrac{b^2\mathrm{sh}^2t}{b^2} = 1$

$\alpha(t) = (a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t) \qquad 1 = 1$

Düzlemdeki bir eğrinin (hiperbolün) parametrik gösterimidir.

Tanım: $\alpha : I \longrightarrow E^n$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ bir eğri ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ olsun.

$\forall t \in I$ için α nın t'ye karşılık gelen hız vektörü diye,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)_{\alpha(t)}$$

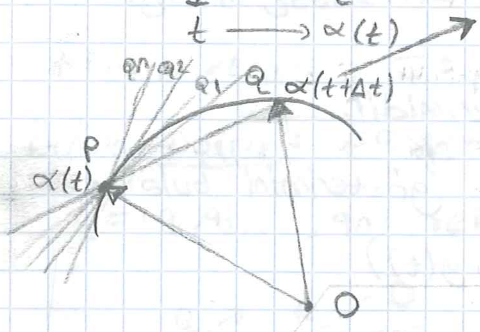
tanjant vektörüne denir.

Geometrik Yorum:

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

$\alpha : I \longrightarrow E^n$

$t \longrightarrow \alpha(t)$



$\alpha : I \longrightarrow E^n$

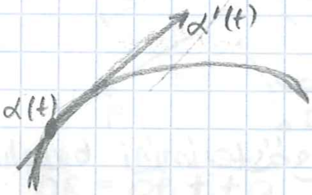
$t \longrightarrow \alpha(t)$

$t+\Delta t \longrightarrow \alpha(t+\Delta t)$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow Q \longrightarrow P$

$\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t) = \overrightarrow{PQ}$

$$\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}$$



$\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ $\quad\alpha$ nın $\alpha(t)$ de teğet vektörü.

Sonuç:

örnek // $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ noktasından geçen ve doğrultmanı,

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ olan doğrunun denklemini yazalım.

$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^n$

$t \longrightarrow \alpha(t) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, \ldots, p_n + tv_n)$

doğrusunun P noktasındaki teğet vektörünü bulalım.
($\alpha'(t)$ yi)

$\alpha'(t) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v$

Hız vektörü, teğet vektörüyle aynı şeydir.

örnek // $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (t, t^2, 0)$

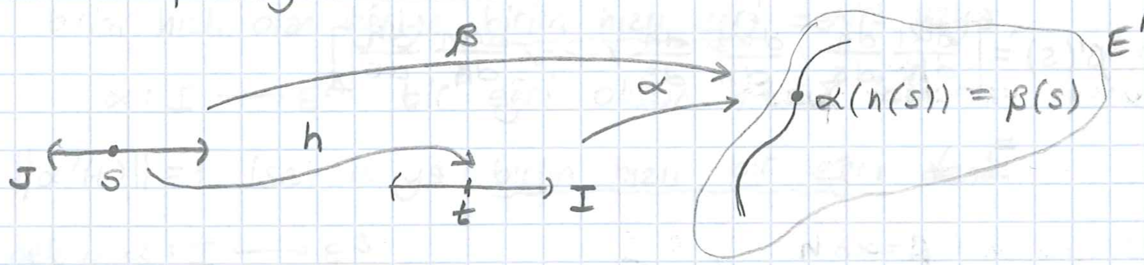
$\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} = (1, 2t, 0)$ parabol eğrisinin hız vektörüdür. (teğet)

örnek // $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t)$

$\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} = (-a\sin t, a\cos t)$ teğet vektörüdür. (çemberin.)

Tanım: (Parametre Değişikliği) : I ve J, $\mathbb{R}$ de iki açık aralık,

$\alpha : I \longrightarrow E^n$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ bir eğri ve $h : J \longrightarrow I$, $s \longrightarrow h(s) = t$ bir diferansiyel-lenebilir fonksiyon olsun.



$\beta = \alpha \circ h = \alpha(h) : J \longrightarrow E^n$
$s \longrightarrow \alpha(h(s)) = \beta(s)$

bileşke fonksiyonuna bir parametre değişikliği denir.

Daha doğrusu : α'nın parametresinin h tarafından değiştirilmesi denir.

$\forall s \in J$ için, $\beta(s) = \alpha(h(s))$

örnek // $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$, $I = (0,4)$ eğrisi verilsin.

Eğer $h(s) = s^2$ ve $J = (0,2)$ alırsak,

$h : J \longrightarrow I$
$s \longrightarrow h(s) = s^2$

$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s)))$

$= (s, s^3, 1-s^2)$

$\alpha : I \longrightarrow E^3$, $t \longrightarrow \alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$, $\beta : J \longrightarrow E^3$, $s \longrightarrow \beta(s) = (s, s^3, 1-s^2)$ //

Ödev // Parametre değişimi, eğriler için bir denklik bağıntısıdır.

Teorem: Eğer β eğrisi α nın parametresinin h tarafından değiştirilmesiyle elde edilmişse //

$$\beta'(s) = \left(\frac{dh}{ds}\right)(s)\,\alpha'(h(s)) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta' = \dfrac{d\beta}{ds} \\ \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt} \end{array} \right.$$

İspat // $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n)$ olsun.

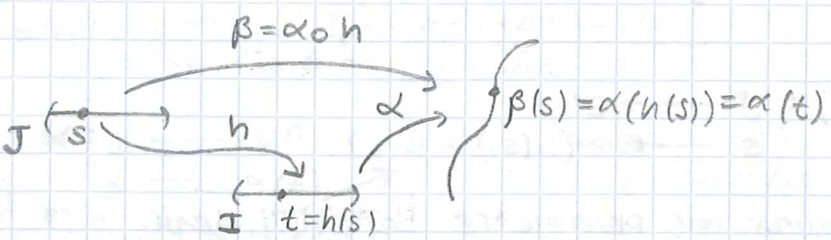
$$\Rightarrow \beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n)(h(s))$$

$$= [\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), ---, \alpha_n(h(s))]$$

$$\beta'(s) = \frac{d\beta(s)}{ds} = \left[\frac{d}{ds}\alpha_1(h(s)), \frac{d}{ds}\alpha_2(h(s)), ---, \frac{d}{ds}\alpha_n(h(s))\right]$$

$$\Rightarrow \beta'(s) = \left[\frac{d\alpha_1}{dh}\frac{dh}{ds}, \frac{d\alpha_2}{dh}\frac{dh}{ds}, ---, \frac{d\alpha_n}{dh}\frac{dh}{ds}\right]$$

$=$



$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dh}, \frac{d\alpha_2}{dh}, ---, \frac{d\alpha_n}{dh}\right)\Big|_{t=h(s)} \frac{dh}{ds}\Big|_s$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, ---, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)\Big|_{h(s)} \frac{dh(s)}{ds}$$

$$\beta'(s) = \underbrace{\alpha'(t)}_{\alpha'(h(s))}\, h'(s)$$ (Aynı eğrinin değişik hızlarla çizilmesidir.)

Tanım: (Skaler Hız): $\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun.

$\vec{v}(t) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ vektörünün $\forall t \in I$ noktasındaki büyüklüğü;

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\alpha'(t)\|$$

ifadesine, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir.

(hız vektörünün normuna (büyüklüğüne), eğrinin skaler hızı denir.)

Tanım: (Regüler Eğri): Bir $\alpha : I \longrightarrow E^n$ eğrisinin $\forall t \in I$ için, hız vektörü sıfır vektörden farklı ise (yani $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ ise) α eğrisi REGÜLER'dir denir.

Sonuç: $\{ \vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0} \iff \|\alpha'(t)\| \neq 0 \}$

Örnek // $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, $\alpha(t) = (t, t^2, 2t)$ eğrisinin regüler olup olmadığını araştırın.

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4} = \sqrt{5 + 4t^2} \neq 0$$

$\Rightarrow \alpha'(t) \neq 0$ olur. yani α regülerdir.

Tanım: (Birim hızlı eğri): Her noktadaki hız vektörü, birim hızlı olan eğriye, birim hızlı eğri denir. Veya,

$\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için,

$\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α ya birim hızlı bir eğri denir.

Örnek // $\alpha : I \longrightarrow E^3$

$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, a)$ $\quad a = \text{sabit}$

eğrisi veriliyor. α birim hızlı mıdır?

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

olduğundan; α, birim hızlı eğridir. 8.12.1995 / CUMA

Tanım: Yolun zamana göre 1. türevine hız denir.

a- $\alpha : I \longrightarrow E^n$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ eğrisinin hız vektörü $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ dir.

Bu vektörel hızdır.

b- $\|\alpha'(t)\| = \left\| \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \right\|$ skaler hızı verir.

c- $\alpha'(t)$ belli ise $\alpha(t) = \int \alpha'(t)\,dt$ yi bulmak gerekir.

(hızın integrali vektörel olarak yolu verir.)

d- Skaler hızın integrali alınırsa,

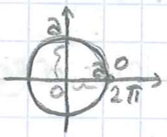
$$S_{[a,b]} = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right\| dt$$

α eğrisinin $[a,b]$ aralığındaki yay uzunluğudur.

Örnek// $\alpha : I \longrightarrow E^2$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $I = (0, 2\pi)$

ise çember eğrisinin yay uzunluğunu (veya çevresini) bulalım.

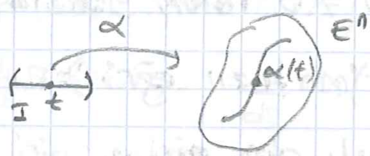
$$S[0,2\pi] = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} a \, dt = 2\pi a \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t) \\ \|\alpha'(t)\| = a \end{array} \right\}$$



(Çemberin çevre uzunluğu $2\pi a$ dır.)

Teorem: $\alpha : I \longrightarrow E^n$'e regüler bir eğri olsun. α'nın birim hızlı olacak şekilde bir β parametrik gösterimi vardır.

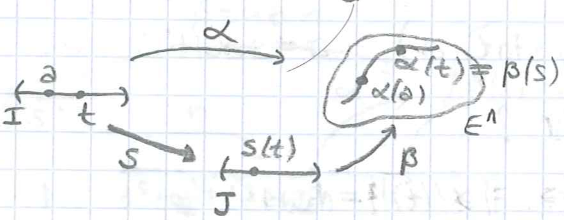
İspat// $\alpha : I \longrightarrow E^n$ $\qquad I \subset \mathbb{R}$
$t \longrightarrow \alpha(t)$



sabit bir $a \in I$ noktası alalım.

$J = (a, t)$ olmak üzere, yay uzunluğu fonksiyonunu tanımlayalım.

$S : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longrightarrow s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$ olarak tanımlanıyor.



$\beta : J \longrightarrow E^n$
$s \longrightarrow \beta(s) = \alpha \circ s^{-1}$

$\alpha = \beta \circ s$ $\forall t$ için $\alpha(t) = (\beta \circ s)t = \beta(s(t))$ yazılabilir.

α regüler olduğundan $\frac{d\alpha(t)}{dt} \neq 0 \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| \neq 0$

$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$ idi. $\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \neq 0$

Ters fonksiyon tanımına (teoreme) göre;

$$t \longrightarrow h = s(t) \Rightarrow s \longrightarrow t = h^{-1}(s)$$

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$, $\beta = \beta(s)$ eğrisi için,

$\beta : J \longrightarrow E^n$
$s \longrightarrow \beta(s) = \alpha \circ s^{-1} = \alpha(t)$

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}\frac{dt}{ds} \Rightarrow \frac{d\beta(s)}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

β'nın birim hızlı olduğunu göstermeliyiz.

$$\left\| \frac{d\beta(s)}{ds} \right\|^2 = \left\langle \frac{d\beta(s)}{ds}, \frac{d\beta(s)}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{d\alpha(t)}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}, \frac{d\alpha(t)}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \left\langle \frac{d\alpha(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\rangle$$

$$= \frac{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \qquad \left\{ \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| \text{ yay uzunluğu formülünden} \right.$$

$$= \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = 1 \Rightarrow \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = 1$$

(O halde her regüler eğrinin birim hızlı gösterimi vardır.)

Sonuç: Bir regüler eğrinin, yay uzunluğu cinsinden parametrik gösterimi birim hızlıdır.

Örnek // $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$
$t \to \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad a > 0 \wedge b \neq 0$

eğrisini yay uzunluğu cinsinden parametrik olarak gösterin.

$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du \Rightarrow a = 0$ (kolay hesaplamak için $a=0$ olsun.)

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ $\{ (a,t) \to (0,t)$ oldu. $\}$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du$

$\Rightarrow s(t) = (\sqrt{a^2+b^2})\, t$, $\sqrt{a^2+b^2} = c$ olsun. (kısaltma için)

$\Rightarrow s(t) = ct \Rightarrow t = \frac{s}{c} \Rightarrow \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right)$

$\Rightarrow \beta(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), b\left(\frac{s}{c}\right)\right)$

eğriyi, yay parametresi cinsinden ifade ettik. Bu gösterimin birim hızlı olduğunu gösterelim. s yay parametresi midir? buna bakalım.

Sonuç: $\beta'(s) = \frac{d\beta(s)}{ds} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2}} = 1 \quad //$$

O halde s, yay parametresidir.

Tanım : $\beta : I \longrightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \| \beta'(s) \| = 1 \Rightarrow T(s) = \frac{d\beta(s)}{ds} = V_1(s)$$ vektörü, bir birim vektördür. $T = \frac{d\beta}{ds} = \beta'$ vektör alanına eğrinin birim teğet vektör alanı denir. Yani, $\beta' \in \chi(E^n)$ de bir vektör alanıdır.

Tanım : $\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\alpha = \alpha(s)$, s yay parametresi olsun.

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \alpha'' = \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \ldots, \alpha^{(n)} = \frac{d^n\alpha}{ds^n}$$

olmak üzere bir S kümesi,

$$S = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(n)}\} \subset \chi(E^n)$$ veriliyor.

S lineer bağımsız veya bağımlı olabilir. Kabul edelim ki $r<n$ olmak üzere, $\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ kümesi lineer bağımsız olsun. $Sp = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$: uzayına $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}$ vektörlerinin gerdiği (ürettiği) uzay denir.

Grahm-Schmith ortogonalizasyon metodunu uygularsak;

$$E_1 = \alpha', \quad E_i = \alpha^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \alpha_i, E_j \rangle}{\underbrace{\langle E_j, E_j \rangle}_{\|E_j\|^2}} E_j \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

formülüyle bir ortogonal sistem elde edersek,

$$i=2, \quad E_2 = \alpha^{(2)} - \sum_{j=1}^{1} \frac{\langle \alpha^{(2)}, E_j \rangle}{\langle E_j, E_j \rangle} E_j = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

$$E_3 = \alpha^{(3)} - \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle \alpha^{(3)}, E_j \rangle}{\langle E_j, E_j \rangle} E_j = \alpha''' - \frac{\langle \alpha''', E_1 \rangle}{\|E_1\|^2} E_1 - \frac{\langle \alpha''', E_2 \rangle}{\|E_2\|^2} E_2$$

$\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ ortogonal sistemi bulunabilir.

$V_i = \frac{E_i}{\|E_i\|}$ olmak üzere, elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal vektör alanları kümesine eğri boyunca, Serret-Frenet r-ayaklısı alanı denir. Eğrinin her s noktasındaki $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ vektörlerine de Frenet vektörleri denir.

Kısaca tekrarlarsak:

$\alpha: I \longrightarrow E^n$ eğrisi veriliyor. $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ kümesi
$s \longrightarrow \alpha(s)$

lineer bağımsız olsun. Grahm-Schmith metoduyla ortogonal olan, $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ kümesini normlayarak $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal kümesini elde ediyoruz. (Bunlar vektör alanları kümesi) Bu vektörlerin her birine de Serret-Frenet r-ayaklısı diyoruz.

Örnek // $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (t, t^2, t)$ veriliyor.

Bu eğrinin Serret-Frenet r-ayaklısını bulalım.

$\alpha' = (1, 2t, 1)$ $\alpha'' = (0, 2, 0)$ $\underbrace{\alpha''' = (0,0,0), \dots}_{\text{lineer bağımlılar.}}$

$\{\alpha', \alpha''\}$ lineer bağımsızdır.

$r = 2$ dir. $E_1 = \alpha'$ olsun.

$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha'$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 4t & E_2 = (0,2,0) - \dfrac{4t}{2+4t^2}(1, 2t, 1) \\ \langle \alpha', \alpha' \rangle = \|\alpha'\|^2 = 1 + 4t^2 + 1 = 2 + 4t^2 & \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{(0, 4+8t^2, 0) - (4t, 8t^2, 4t)}{2+4t^2}$$

$$E_2 = \frac{(-4t, 4, -4t)}{2+4t^2} = \frac{(-2t, 2, -2t)}{1+2t^2} \quad //$$

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{(1, 2t, 1)}{\sqrt{2+4t^2}}$$

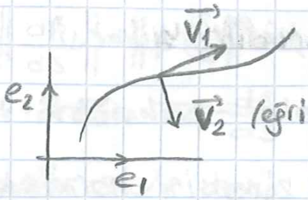
$$\|E_2\| = \frac{1}{1+2t^2}\left(\sqrt{8t^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\left(\frac{1}{1+2t^2}\right)(-2t, 2, -2t)}{\frac{2}{\sqrt{1+2t^2}}} = \frac{(-t, 1, -t)}{\sqrt{1+2t^2}}$$

$$V_1 = \frac{(1, 2t, 1)}{\sqrt{2+4t^2}} \qquad V_2 = \frac{(-t, 1, -t)}{\sqrt{1+2t^2}}$$

O halde $\{V_1, V_2\}$ 2-ayaklı Frenet alanıdır.

birim vektörlerdir ve birbirlerine diktirler. (ortonormaldirler.)



(eğri boyunca hareketli vektörlerdir.)

$$V_i, V_j = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

$n=3$ özel halinde :

1°) $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$\quad s \longrightarrow \alpha(s)$ $\quad$ s, yay parametresi olsun.

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds} \Rightarrow E_1(s) = \alpha'(s) \Rightarrow \|E_1(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$$

$\Rightarrow T = \frac{d\alpha}{ds} = V_1(s)$ ye, α'nın birim teğet vektörü denir.

$T = V = \frac{d\alpha}{ds}$ vektör alanına birim teğet vektör alanı denir.

2°) Grahm-Schmith metodunu uygulamadan eğri boyunca ortonormal baz vektörleri elde edelim.

$$\langle T,T\rangle = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle T,T\rangle = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \langle \frac{dT}{ds}, T\rangle + \langle T, \frac{dT}{ds}\rangle = 0$ (iç çarpımda değişme olduğundan)

$$\Rightarrow \langle \frac{dT}{ds}, T\rangle + \langle \frac{dT}{ds}, T\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \frac{dT}{ds}, T\rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle \frac{dT}{ds}, T\rangle = 0 \Rightarrow \frac{dT}{ds} \perp T$ dir.

Her birim vektörün türevi (türev vektörü) kendisine diktir.

Ödev // Normu sabit olan her vektörün türev vektörü kendisine ortogonaldir.

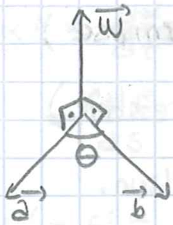
3°) $E_2 = \frac{dT}{ds}$ $\quad V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\|\frac{dT}{ds}\right\|} = \frac{\frac{d}{ds}(\alpha')}{\left\|\frac{d}{ds}\alpha'\right\|} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$

$$T = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'$$

$\Rightarrow \boxed{T = V_1 = \alpha'}$ 1. Frenet vektörü

$\Rightarrow \boxed{N = V_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}}$ 2. Frenet vektörü $\qquad \left(\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{ds^2} \neq 0\right)$

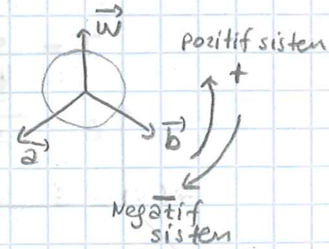
Tanım : İki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel (dış) çarpımı öyle bir $\vec{w}$ vektörüdür ki, şu özellikleri sağlar :



i - $\|\vec{w}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| \sin\theta$ (büyüklüğü)

ii - $\vec{w}$ nın doğrultusu her iki vektöre dik olacak şekildedir.

iii - $\vec{w}$ nın yönü, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ ile bir sağ (pozitif) sistem teşkil edecek şekildedir.



O halde $\vec{w} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ yazılır.

$V_3 = V_1 \wedge V_2$ şeklinde ise

$$\|V_3\| = \|V_1 \wedge V_2\| = \|\underset{1}{V_1}\|.\|\underset{1}{V_2}\| \sin\frac{\pi}{2}$$ $\rightarrow V_1 \perp V_2$ den

$\Rightarrow \|V_3\| = 1$ birim vektördür.

$$V_3(s) = \vec{B}(s) = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

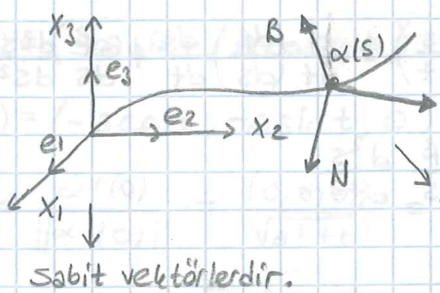
Tanım : $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ üçlüsüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet 3 ayaklısı (veya vektörleri, veya kısaca Frenet vektörleri) denir.

$V_1(s) = T(s)$: α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü,

$V_2(s) = N(s)$: α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birim asli normal vektörü, (birim asal normal vektörü)

$V_3(s) = B(s)$: α nın $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir.

Bunlar, eğrinin yay parametresiyle verilmesi halinde geçerlidir.



Sabit vektörlerdir. türevleri sıfırdır.

hareketli koordinat sistemi. (Frenet sistemi) Dönme ve öteleme vardır. Türevleri genelde $\neq 0$ dır.

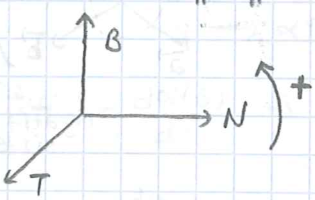
Teorem: (Eğri, keyfî bir parametreye göre verilmemişse, Frenet vektörlerinin nasıl bulunacağını veren teoremdir.)

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ birim hızlı olmayan bir eğri olsun.

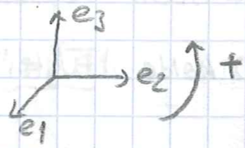
$\|\alpha'\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \neq 1$ olsun. (t yay parametresi değil, keyfi bir parametre)

Bu taktirde, $\{T, N, B\}$ Frenet vektör alanları:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \wedge T, \quad B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$



yönde hareket edilirse birinden diğeri elde edilir.



$T \wedge N = B$, $N \wedge B = T$, $B \wedge T = N$ $\quad$ $N \wedge T = -B$, $B \wedge N = -T$, $T \wedge B = -N$ //

$e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ $\quad$ $e_2 \wedge e_1 = -e_3$, $e_3 \wedge e_2 = -e_1$, $e_1 \wedge e_3 = -e_2$

İspat// $\alpha : I \longrightarrow E^3$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ verilsin ve $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ lineer bağımsız olsun. Grahm-Schmith ortogonalizasyon metoduyla, $\{E_1, E_2\}$ kümesi elde edip buradan $\{V_1, V_2\}$ ortogonal kümeyi ve bunların vektörel çarpımından üçüncü ortonormal kümeyi elde edeceğiz.

$$E_1 = \alpha'(t) \Rightarrow \vec{V_1}(t) = \vec{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \Rightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}}$$

$\beta(s) = \alpha(t(s))$: s yay parametresi olsun.

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\beta(s) = \frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

α nın t'ye göre türevi, β nın s yay parametresi türevi cinsinden yazıldı.

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\beta}{ds}\right)\frac{ds}{dt} + \frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}$$

$$\Rightarrow \alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d\beta}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\right]\frac{ds}{dt} + \frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

Şimdi $\alpha' \wedge \alpha''$ yü bulalım.

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \frac{d\alpha}{dt} \wedge \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right) \wedge \left(\frac{d^2\beta}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \vec{0} \qquad \left\{\vec{u} \wedge \vec{u} = 0\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha' \wedge \alpha'' = \frac{d\alpha}{dt} \wedge \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

$T = \dfrac{d\beta}{ds}$ (birim teğet vektör.)

$$N = \frac{\frac{d^2\beta}{ds}}{\left\|\frac{d^2\beta}{ds}\right\|} \qquad T \perp T' \Rightarrow T' = \frac{dT}{ds} = \frac{d^2\beta}{ds^2}$$

$$T = \frac{d\beta}{ds} \Rightarrow \frac{d^2\beta}{ds^2} = N\left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|$$

$$\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2} = T \wedge \left(N\left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|\right) = B\left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha' \wedge \alpha'' = B\left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} \quad --- \ (1)$$

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \underbrace{\|\vec{B}\|}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right\|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} \quad ---- \ (2)$$

(1) 'ile (2) yi oranlarsak;

Sonuç// $\boxed{B = \dfrac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}} \wedge \boxed{T = \dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}} \wedge \boxed{N = B \wedge T}$

dairesel helis

Örnek// $\alpha : I \longrightarrow E^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ eğrisinin $(a>0, b\neq 0)$ $t=0$ noktasındaki Frenet vektörlerini bulun. (3 ayaklısını bulun.)

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \Rightarrow \alpha'(0) = (0, a, b)$

$\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \Rightarrow \alpha'(0) = (-a, 0, 0)$

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \frac{(0,a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \left(0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a(b\vec{j} - a\vec{k})$$

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$B = \frac{\alpha'(0)\wedge\alpha''(0)}{\|\alpha'(0)\wedge\alpha''(0)\|} = \frac{-a(b\vec{j}-a\vec{k})}{a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-b\vec{j}+a\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{B} = \left(0, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (0, -c, d)$$

$$\vec{N}(0) = \vec{B}\wedge\vec{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -c & d \\ 0 & d & +c \end{vmatrix} = i\left(\frac{-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$$

$\vec{N}(0) = i = (1,0,0)$ O halde işlemler doğrudur.

örnek // $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$ $\alpha(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ eğrisinin Frenet vektörlerini bulun.

$$\alpha'(t) = (3-3t^2, 6t, 3+3t^2) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2)$$

$$\|\alpha'(t)\| = 3.\sqrt{(1-t^2)^2+(2t)^2+(1+t^2)^2}$$

$$= 3\sqrt{1-\cancel{2t^2}+t^4+4t^2+1+\cancel{2t^2}+t^4}$$

$$= 3\sqrt{2+4t^2+2t^4} = 3\sqrt{2(1+t^2)^2}$$

$$\|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1-t^2, 2t, 1+t^2)$$

$$\alpha'' = 3(-2t, 2, 2t) = 6(-t, 1, t)$$

$$\alpha'\wedge\alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \\ -t & 1 & t \end{vmatrix} .3.6 = 18\left[(t^2-1)\vec{i} - (2t)\vec{j} + (1+t^2)\vec{k}\right]$$

$$\|\alpha'\wedge\alpha''\| = 18\sqrt{(t^2-1)^2+(-2t)^2+(1+t^2)^2}$$

$$= 18\sqrt{t^4}$$

$$= 18\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$B = \frac{\alpha'\wedge\alpha''}{\|\alpha'\wedge\alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(t^2-1, -2t, 1+t^2)$$

$$\vec{N}=\vec{B}\wedge\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)\sqrt{2}(1+t^2)}\begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2-1 & -2t & 1+t^2 \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \end{vmatrix}$$

$$N=\frac{1}{2(1+t^2)^2}\Big[\vec{i}(-2t-2t^3-2t-2t^3)-\vec{j}(t^4-1+t^4-1)$$
$$+k(2t^3-2t-2t^3+2t)\Big]$$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{2(1+t^2)^2}\left[(-4t-4t^3)\vec{i}+(2-2t^4)\vec{j}\right]$$

$$N=\frac{1}{2(1+t^2)^2}\left(-4t(1+t^2)i+2(1-t^2)(1+t^2)j\right)$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left(-2t\,i+(1-t^2)j\right)=\frac{1}{1+t^2}(-2t,1-t^2,0)$$

Problemler

1- $\alpha(t)=(cht, sht, t)$ eğrisini yay parametresi cinsinden parametrik olarak ifade edin.

2- $\alpha(s)=\left(\frac{4}{5}\cos s, 1-\sin s, -\frac{3}{5}\cos s\right)$ eğrisi için s'nin yay parametresi olup olmadığını araştırın. Eğer yay parametresi ise Frenet vektörlerini bulun.

3- $\alpha(t)=\left(2t, t^2, \frac{t^3}{3}\right)$ Frenet vektörlerini bulun.

4- $\alpha(t)=\left(t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ eğrisinin $(1,0,0)$ noktasındaki Frenet vektörlerini bulun.

Çözümler:

1- $S_{[a,b]}=\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$

$s(t)=\int_a^b \|\alpha'(u)\|\,du$ ve $a=0$ alırsak

$s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du$

$\alpha'=(sht, cht, 1)$ $\qquad\{ch^2t-sh^2t=1\}$

$\|\alpha'\|=\sqrt{sh^2t+ch^2t+1}=\sqrt{2ch^2t}=\sqrt{2}\,cht$

$\|\alpha'(u)\|=\sqrt{2}\,ch(u)$

$s(t)=\int_0^t \sqrt{2}\,ch(u)\,du=\sqrt{2}\,shu\Big|_0^t=\sqrt{2}(sht-sh0)=\sqrt{2}\,sht$

$sh\,t = s \Rightarrow t = \arg sh\, s$

$\alpha(t(s)) = \beta(s) = (ch(\arg sh s), sh(\arg sh s), \arg sh s)$

$= (\sqrt{1+s^2}, s, \arg sh s)$ //

2- Birinci türevin normu 1 olmalıdır.

$\alpha'(s) = \frac{ds}{dt} = (-\frac{4}{5}\sin s, -\cos s, \frac{3}{5}\sin s)$

$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 s + \cos^2 s + \frac{9}{25}\sin^2 s} = \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s} = 1$

O halde s yay parametresidir.

$T = \frac{d\alpha}{ds} = (-\frac{4}{5}\sin s, -\cos s, \frac{3}{5}\sin s)$

$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = (-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)$

$N = \frac{\frac{d^2\alpha}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|}$ $\quad \left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\| = 1 \quad \Rightarrow N = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = (-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)$

$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4/5 \sin s & -\cos s & 3/5 \sin s \\ -4/5 \cos s & \sin s & 3/5 \cos s \end{vmatrix}$

$\Rightarrow B = i(-\frac{3}{5}\cos^2 s - \frac{3}{5}\sin^2 s) - j(-\frac{12}{25}\cos s \cdot \sin s + \frac{12}{5}\cos s \sin s) + k(-\frac{4}{5}\sin^2 s - \frac{4}{5}\cos^2 s)$

$\Rightarrow B = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{k} = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$

3- $\alpha(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$ $\quad \alpha : \mathbb{R} \to E^3$

$\alpha'(t) = (2, 2t, t^2)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4+4t^2+t^4} = 2+t^2$

$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(2, 2t, t^2)}{2+t^2} = \left(\frac{2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}, \frac{t^2}{2+t^2}\right)$

$\alpha'' = (0, 2, 2t) = 2(0, 1, t)$

$\alpha' \wedge \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} \cdot 2 = 2[t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + 2\vec{k}]$

$\Rightarrow \|\alpha' \wedge \alpha''\| = 2\sqrt{t^4+4t^2+4} = 2(t^2+2)$

$$B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = 2\frac{(t^2,-2t,2)}{2(t^2+2)} = \frac{(t^2,-2t,2)}{(t^2+2)}$$

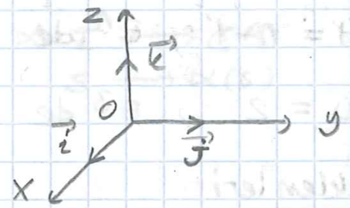
$$= \left(\frac{t^2}{t^2+2}, \frac{-2t}{t^2+2}, \frac{2}{t^2+2}\right)$$

$$N = B \wedge T = \frac{1}{2+t^2}\frac{1}{t^2+2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & -2t & 2 \\ 2 & 2t & t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(t^2+2)^2}\left(-2t\vec{i} - (t^2-2)j + 2t\vec{k}\right)$$

Bir Eğrinin OSKÜLATÖR HİPER DÜZLEMLERİ

Tanım: Bir $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. E^n in, $p<r$ olmak üzere; $S_p = \{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzayına, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki p-HİPER DÜZLEMİ denir.



Xoy düzlemi $(z=0)$

$\Rightarrow$ $S_p\{\vec{i},\vec{j}\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzay.

yoz düzlemi $(x=0)$

$\Rightarrow$ $S_p = \{\vec{j},\vec{k}\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzay.

Düzlem: $AX+By+Cz+D=0$ düzlem denklemidir.

$K = \{P : P \in E^3 \wedge AX(P)+By(P)+Cz(P)+D=0\}$ kümesidir.

Hiper Düzlem: $H = \{P : P \in E^n \wedge A_1X_1(P)+A_2X_2(P)+\dots+A_nX_n(P)+D=0\}$ kümesidir.

$A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n + D = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_iX_i + D = 0$.

hiper düzlem denklemidir.

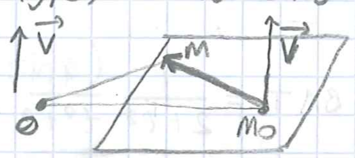
Düzlem Denklemi: $M(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $V(A, B, C)$ normal vektörünün düzlem denklemi:

$M(x, y, z)$ düzlemde hareketli bir nokta olsun. $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{V}$

$\Rightarrow \langle \vec{V}, \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0 \qquad M = \overrightarrow{OM} = (x, y, z) \qquad M_0 = \overrightarrow{OM_0}$

$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$



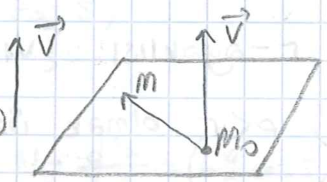
Hiper Düzlem Denklemi: E^n deki $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ noktasından geçen ve $\vec{V} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ vektörüne dik olan düzlem denklemi:

$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hiper düzlemde bir hareketli nokta,

$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{V} \Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{V} \rangle = 0$

$\Rightarrow A_1(x_1 - x_{10}) + A_2(x_2 - x_{20}) + \ldots + A_n(x_n - x_{n0}) = 0$

$\Rightarrow A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + D = 0$

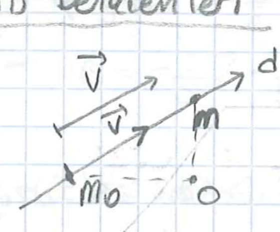


hiper düzlem denklemidir.

$\text{Boy } H = n - 1$, E^n de

$\text{boy } D = 2$, E^3 de

Doğru Denklemleri



denklemi bulmak için;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ doğru üzerinde bir nokta ve

$\vec{V}(a, b, c)$ doğrultman vektörü verilmelidir.

$M(x, y, z)$ doğru üzerinde hareketli bir nokta olsun.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}, \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{V}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{V} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array} \right\}$ doğrunun parametrik denklemi.

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$,

$\Rightarrow \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ doğrunun kartezyen denklemidir.

Eğer $a=0$ ise $\vec{V}(0,b,c)$

$\Rightarrow x-x_0=0$, $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ kartezyen denklemdir.

En de genelleştirirsek ;

$M_0(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ noktasından geçen ve $\vec{V}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi :

$\vec{OM}=\vec{OM_0}+\lambda\vec{V}$ ise $\begin{cases} x_1=x_{10}+\lambda a_1 \\ x_2=x_{20}+\lambda a_2 \\ \vdots \\ x_n=x_{n0}+\lambda a_n \end{cases}$

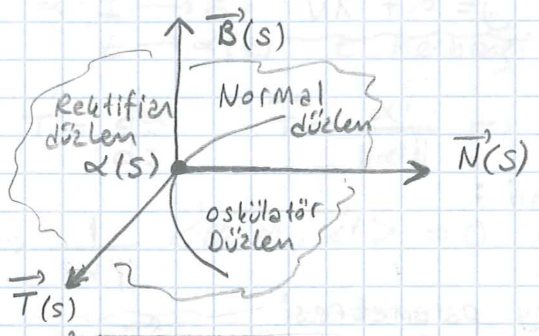
şeklinde parametrik denklemdir.

$a_1\neq 0 \wedge a_2\neq 0 \wedge \dots \wedge a_n\neq 0$ ise

$$\frac{x_1-x_{10}}{a_1}=\frac{x_2-x_{20}}{a_2}=\dots=\frac{x_n-x_{n0}}{a_n}$$

E^n deki bir eğrinin Frenet vektör 3-ayaklısı

$\{V_1(s),V_2(s),V_3(s)\}=\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$



$\alpha: I \longrightarrow E^n$
$s \longrightarrow \alpha(s)$

E^3 de,

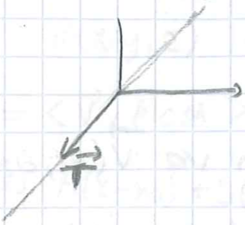
Tanım : 1°) $Sp\{\vec{T}(s),\vec{N}(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör Düzlemi denir.

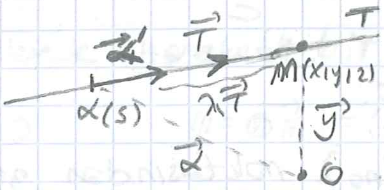
2°) $Sp\{\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemi denir.

3°) $Sp\{\vec{T}(s),\vec{B}(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifian düzlemi denir.

Doğru Denklemleri :

a) Teğet doğrusunun denklemi.





$\alpha : I \longrightarrow E^3$
$s \longrightarrow \alpha(s)$

$$\vec{OM} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{T}$$

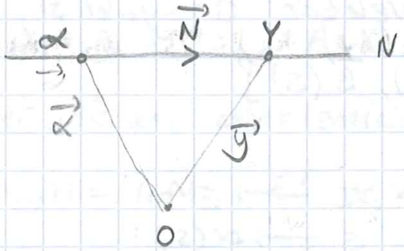
$(x,y,z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \lambda (T_1, T_2, T_3)$ veya

$\alpha = \alpha(t) \Rightarrow \vec{T} = \dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ $\qquad \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}$

$\Rightarrow \lambda \vec{T} = \mu \alpha'$

$\Rightarrow \vec{y} = \vec{\alpha} + \mu \vec{\alpha}'$ teğet denklemi.

b) Aslî normal doğrusunun denklemi :

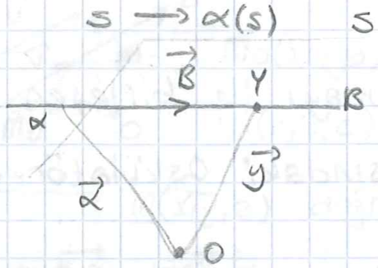


$\vec{OY} = \vec{O\alpha} + \vec{\alpha Y}$

$\vec{y} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{N}$

c) Binormal doğrusunun denklemi :

i°) $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$s \longrightarrow \alpha(s)$ $\quad$ s yay parametresi



$\vec{y} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{B}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

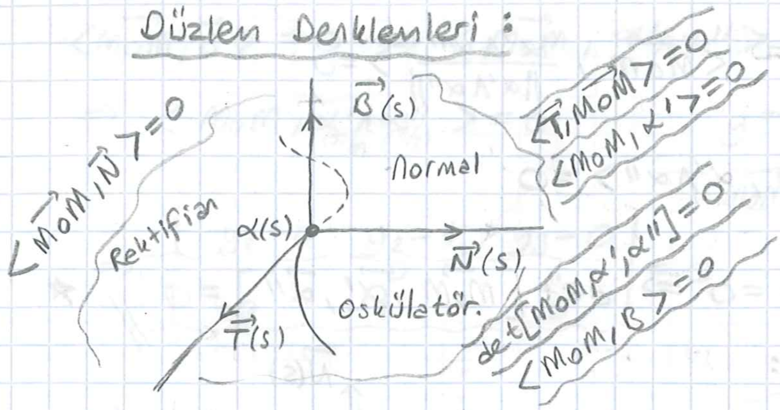
ii°) $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t)$ $\quad$ t herhangi bir parametre,

$\vec{B} = \dfrac{\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$, $\quad \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}$ $\quad \alpha'' = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$

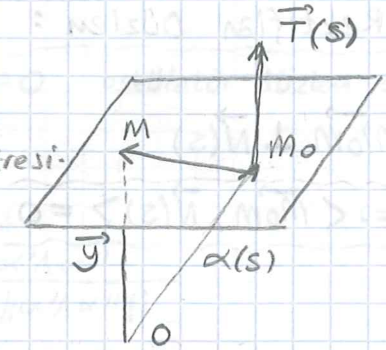
$\vec{B} \parallel \alpha' \wedge \alpha'' \Rightarrow \vec{y} = \vec{\alpha} + \mu(\alpha' \wedge \alpha'')$ $\qquad \mu \in \mathbb{R}$

Bu iki doğru aynı doğrunun denklemidir.

Düzlem Denklemleri :



a- Normal Düzlem : (i) $\alpha : I \to E^3$
$s \to \alpha(s)$
s yay parametresi.



$\vec{T} \perp \vec{M_0M} \Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{M_0M} \rangle = 0$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{y} = (\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$

$\vec{M_0M} = M - M_0 = \vec{y} - \alpha(s)$

$= (y_1 - \alpha_1, y_2 - \alpha_2, y_3 - \alpha_3)$

$\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$

☆ $\Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{M_0M} \rangle = T_1(y_1 - \alpha_1) + T_2(y_2 - \alpha_2) + T_3(y_3 - \alpha_3) = 0$ //

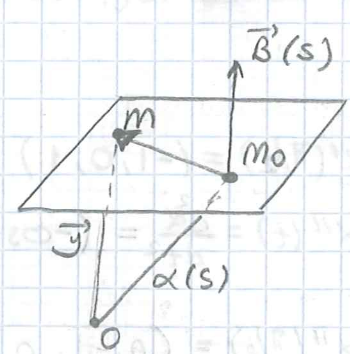
(ii)- $\alpha : I \to E^3$
$t \to \alpha(t)$ t herhangi bir parametre.

$\vec{T} = \frac{d\alpha}{ds}$ $\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \Rightarrow \langle \vec{M_0M}, \frac{\vec{\alpha}'}{\|\alpha'\|} \rangle = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\|\alpha'\|} \langle \vec{M_0M}, \vec{\alpha}' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{M_0M}, \vec{\alpha}' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{M_0M}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle = 0$ normal düzlem denklemidir.

b- Oskülatör Düzlem :



i- $\alpha : I \to E^3$
$s \to \alpha(s)$ s yay parametresi.

$\vec{B}(s) \perp \vec{M_0M}$

$\Rightarrow \langle \vec{M_0M}, \vec{B}(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{y} - \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle = 0$

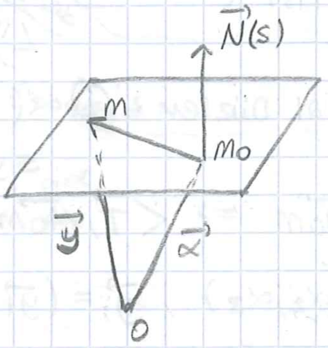
ii- $\alpha : I \to E^3$
$t \to \alpha(t)$ t, herhangi bir parametre,

$$\vec{B}(s) = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{M_0M}, \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \langle \overrightarrow{M_0M}, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle = 0 \Rightarrow \det[\overrightarrow{M_0M}, \vec{\alpha}', \vec{\alpha}''] = 0 \quad // \quad \star$$

c- Rektifian Düzlem :



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}(s)$$

$$\star \quad \Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{N}(s) \rangle = 0 \quad //$$

Örnek // $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, \ln(\tan \tfrac{t}{2}))$$

eğrisinin $P = (0,1,0)$ noktasındaki oskülatör normal ve rektifian düzlem denklemlerini ve teğet, normal, binormal doğru denklemlerini bulun.

$$P = \alpha(t) \Rightarrow (0,1,0) = (\cos t, \sin t, \ln(\tan \tfrac{t}{2}))$$

$$\Rightarrow \cos t = 0 \wedge \sin t = 1 \wedge \ln(\tan \tfrac{t}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow t = \pi/2 \quad //$$

$P = \alpha(\pi/2)$

$$\alpha(\pi/2) = (0,1,0), \quad \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(-\sin t, \cos t, \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos t/2}}{\frac{\sin t/2}{\cos t/2}}\right)$$

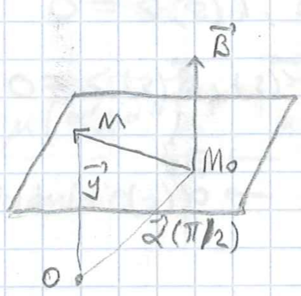
$$= \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{\sin t}\right)$$

$\alpha'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$,

$$\alpha''(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(-\cos t, -\sin t, \frac{-\cos t}{\sin^2 t}\right)$$

$\alpha''(\pi/2) = (0, -1, 0)$

a) Oskülatör düzlem denklemi :



$\langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle M_0M, \alpha'_{(\pi/2)} \wedge \alpha''_{(\pi/2)} \rangle = 0$ $\quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$\overrightarrow{M_0M} = M - M_0 = \vec{y} - \vec{\alpha}(\pi/2)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 - 0 & y_2 - 1 & y_3 - 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 + y_3 = 0$ oskülatör düzlem denklemi.

$\vec{B} = (1, 0, 1)$

b) Rektifian düzlem denklemi :

$$\vec{T}_{(\pi/2)} = \frac{\alpha'(\pi/2)}{\|\alpha'_{(\pi/2)}\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \qquad \vec{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

$\alpha'(t) = (-1, 0, 1) \qquad \alpha''(t) = (0, -1, 0)$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = e_3 + e_1$$
$$= k + i$$

$\alpha' = (1, 0, 1)$

$$\Rightarrow \vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-e_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2e_2/2 = -e_2$$

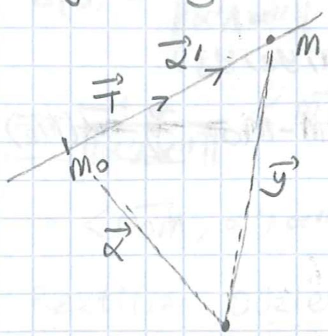
$\vec{N} = (0, -1, 0)$

$\langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{N} \rangle = 0 \Rightarrow (y_1 - 0)0 + (y_2 - 1)(-1) + (y_3 - 0).0 = 0$

$\Rightarrow -y_2 + 1 = 0$ rektifyan düzlem denklemi.

Ödev: Normal düzlem denklemi.

Teğet Doğrusunun Denklemi :



$$\vec{y} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{\alpha}'$$

$$\Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (0,1,0) + \lambda(-1,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = -\lambda \\ y_2 = 1 \\ y_3 = \lambda \end{array}\right\} \text{parametrik denklem.}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{-1} = \frac{y_3}{1}, \quad y_2 = 1$$

$-y_1 = y_3 \quad , \quad y_2 = 1$ ($y_2 = 1$ düzlemindeki doğru denklemidir.)

17.12.95 / Pazar.

- EĞRİLİKLER -

$\alpha : I \longrightarrow E^n$, $s \longrightarrow \alpha(s)$ bir eğri olsun. α nın $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere ;

(α nın türevleriyle oluşan ortonormal baz.)

$$k_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longrightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \qquad 1 \le i < r$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i-inci eğrilik fonksiyonu, $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da α nın $\alpha(s)$ noktasındaki i. eğriliği denir.

$$V_i' = \frac{dV_i}{ds} \qquad k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$$
$$k_2(s) = \langle V_2'(s), V_3(s) \rangle$$
$$\dots$$
$$k_{r-1}(s) = \langle V_{r-1}'(s), V_r(s) \rangle$$

Özel olarak : E^3 de, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\} = \{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$

$\boxed{\varkappa = k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle = \langle \vec{T}'(s), \vec{N}(s) \rangle}$: 1. eğrilik : eğrilik. //
kappa
(3. boyutta.)

$\boxed{\tau = k_2(s) = \langle V_2'(s), V_3(s) \rangle = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle}$: 2. eğrilik : burulma //
To.

Örnek // $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right), \quad c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$a > 0$, $b \neq 0$, $a, b = $ sabit

eğrisi veriliyor. Bu eğrinin bir s noktasındaki eğriliklerini bulalım.

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$$

$$V_1 = T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\alpha'}{1} = \alpha' \qquad \left\{ \|\alpha'\| = \frac{c}{c} = 1 \right.$$

$$T(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) = V_1(s)$$

$$V_2(s) = N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\frac{d^2X}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2X}{ds^2}\right\|}$$

$$T' = \frac{dT}{ds} = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \|T'\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)}{\frac{a}{c^2}} = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$= \vec{N}(s) = \vec{V_2}(s)$$

$$k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s)\rangle = \langle T'(s), N(s)\rangle$$

$$k_1 = \varkappa = \frac{a}{c^2}\sin^2\frac{s}{c} + \frac{a}{c^2}\cos^2\frac{s}{c} = \frac{a}{c^2}$$

$$\Rightarrow \varkappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad // \ \text{eğrilik.}$$

$$\vec{B}(s) = V_3(s) = V_1(s) \wedge V_2(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}\right) - \vec{j}\left(\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}\right) + \vec{k}\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$= \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right) = \vec{B}(s)$$

$$k_2(s) = \tau(s) = \langle V_2'(s), V_3(s)\rangle = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s)\rangle$$

$$N'(s) = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2} \quad // \ \text{burulma}$$

Frenet Formülleri (denklenleri):

$n=3$ özel halinde (3 boyutlu öklid uzayında) ifade edeceğiz.

$\alpha: I \to E^3$ bir regüler eğri olsun. Bir $s \in I$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{\vec{V_1}(s), \vec{V_2}(s), \vec{V_3}(s)\}$ veya $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ olsun.

$$\vec{T}'(s) = \frac{d\vec{T}(s)}{ds} = a_{11}\vec{T}(s) + a_{12}\vec{N}(s) + a_{13}\vec{B}(s)$$

$$\vec{N}'(s) = \frac{d\vec{N}(s)}{ds} = a_{21}\vec{T}(s) + a_{22}\vec{N}(s) + a_{23}\vec{B}(s)$$

$$\vec{B}'(s) = \frac{d\vec{B}(s)}{ds} = a_{31}\vec{T}(s) + a_{32}\vec{N}(s) + a_{33}\vec{B}(s)$$

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \Rightarrow \underline{T' = \|T'\|\vec{N}}$$

$$a_{11} = \langle T', T\rangle = \langle a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B, T\rangle$$

$$= a_{11}\underbrace{\langle T, T\rangle}_{1} + a_{12}\underbrace{\langle N, T\rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle B, T\rangle}_{0}$$

$$a_{11} = \langle \vec{T}', \vec{T}\rangle = \langle \|T'\|N, \vec{T}\rangle = 0$$

$$\vec{T}' = \|\vec{T}'\|\vec{N} = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B$$

$$\Rightarrow a_{11} = 0, \quad a_{12} = \|T'\| \quad a_{13} = 0$$

$$k_1(s) = \langle V_1', V_2\rangle = \langle T', N\rangle = \langle \|T'\|N, \vec{N}\rangle = \|T'\|$$

$$\Rightarrow \underline{k_1(s) = \|T'\|}$$

$\Rightarrow \|T'\| = \underline{\frac{dT}{ds} = k_1\vec{N}}$ olmaktadır.

$$\langle N, N\rangle = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle N, N\rangle = 0 \Rightarrow \langle N', N\rangle + \langle N, N'\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2\langle N', N\rangle = 0 \Rightarrow \langle N, N'\rangle = 0 \Rightarrow \underline{a_{22} = \langle N', N\rangle = 0}$$

$\langle T, N \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle T, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0$

$\Rightarrow a_{12} + a_{21} = 0 \Rightarrow \underline{a_{21} = -a_{12}} \Rightarrow \underline{a_{21} = -k_1(s)} = \|T'\|$

$k_2(s) = \langle V_2'(s), V_3 \rangle = \langle N', B \rangle = a_{23}$

$\Rightarrow \underline{a_{23} = k_2(s)}$

$\langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \langle T', B \rangle + \langle T, B' \rangle = 0$

$\Rightarrow a_{13} + a_{31} = 0 \Rightarrow a_{31} = -a_{13} = 0 \Rightarrow \underline{a_{31} = 0}$

$\langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0$

$\Rightarrow a_{23} + a_{32} = 0 \Rightarrow a_{32} = -a_{23} \Rightarrow \underline{a_{32} = -k_2(s)}$

$\langle B, B \rangle = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle B, B \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle B', B \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', B \rangle = 0$

$\Rightarrow \underline{a_{33} = 0}$

Sonuç:

$$\frac{dT}{ds} = k_1 N$$

$$\frac{dN}{ds} = -k_1 T + k_2 B$$

$$\frac{dB}{ds} = -k_2 N$$

Bu bağıntılara Frenet formülleri (denklemleri) denir.

Matris eşitlikleri olarak;

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$ (Frenet formülleri) //

Teorem: $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t)$ eğrisi için (t herhangi bir parametre)

a- $\boxed{k_1 = \varkappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}}$ ($\varkappa$: kappa, τ: To)

b- $\boxed{k_2 = \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}}$ → determinant.

eğrilikler bu formüllerle bulunur. //

İspat// a) $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$; $\frac{d\alpha}{ds} = T \wedge \frac{ds}{dt} = \vartheta$ − skaler hız

$\Rightarrow \alpha' = T.\vartheta$

$\Rightarrow \alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(T\vartheta) = \frac{dT}{dt}\vartheta + T\frac{d\vartheta}{dt}$

$\Rightarrow \alpha'' = \left(\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}\right)\vartheta + T.\frac{d\vartheta}{dt}$

$\Rightarrow \alpha'' = \frac{dT}{ds}\vartheta^2 + T\frac{d\vartheta}{dt}$

$\Rightarrow \alpha'' = (k_1 N)\vartheta^2 + T\frac{d\vartheta}{dt}$

$\Rightarrow \alpha' \wedge \alpha'' = (T\vartheta)\wedge\left(k_1 N\vartheta^2 + T\frac{d\vartheta}{dt}\right)$

$= k_1\vartheta^3 \underbrace{T\wedge N}_{B} + \underbrace{T\wedge T}_{\vec{0}}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$

$\Rightarrow \alpha' \wedge \alpha'' = k_1\vartheta^3 B$

$\Rightarrow \|\alpha' \wedge \alpha''\| = \|k_1\vartheta^3 \underbrace{B}_{1}\| = k_1\vartheta^3$

$\Rightarrow k_1 = \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\vartheta^3}$, $\vartheta = \frac{ds}{dt} \Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} s = \int_0^t \|\alpha'\| du \\ \frac{ds}{dt} = \|\alpha'\| \end{array}\right.$

$\Rightarrow k_1 = \varkappa = \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$ //

b) $\alpha'' = k_1 N\vartheta^2 + T\frac{d\vartheta}{dt}$

$\alpha''' = \frac{d}{dt}(\alpha'') = \frac{d}{dt}\left(k_1 N\vartheta^2 + T\frac{d\vartheta}{dt}\right)$

$= \frac{dk_1}{dt}N\vartheta^2 + k_1\frac{dN}{dt}\vartheta^2 + 2k_1 N\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{dT}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + T\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{dt} = (-k_1 T + k_2 B)\vartheta$

$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = (k_1 N)\vartheta$

$\alpha''' = (\_\_\_\_)\vec{T} + (\_\_\_\_)\vec{N} + k_1 k_2 \vec{B}\vartheta^3$

$\alpha'\wedge\alpha'' = k_1 B\vartheta^3$

$\Rightarrow [\alpha', \alpha'', \alpha'''] = \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = k_1^2 k_2 v^6$

$$k_2 = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{k_1^2 v^6} = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\left(\frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}\right)^2 \cancel{v^6}}$$

$$\Rightarrow k_2 = \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad //$$

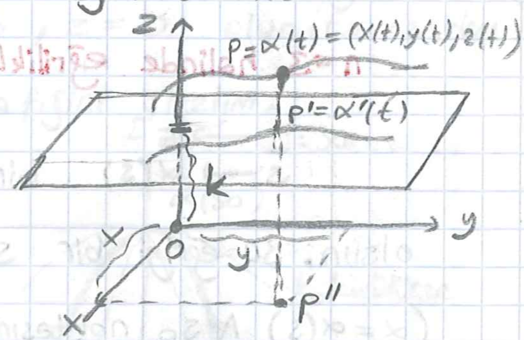
Örnek// $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

eğrisinin eğrilik ve burulmasını hesaplayınız.

(Hatırlatma): **Bir Eğrinin Koordinat Düzlemleri Üzerine İzdüşümü**

$\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ bir eğri olsun.

Bu eğrinin $z = k =$ sabit düzlemine izdüşümü ;



$\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha'(t)$

$(x, y, z) \longrightarrow (x, y, k)$

$p' = \alpha'(t) = (x(t), y(t), k)$

$z = k$ düzlemine izdüşümünü buluruz.

Özel olarak : $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

eğrisinin koordinat düzlemleri üzerine izdüşümlerini bulalım.

Xoy düzlemi üzerine : $z = 0$ alınırsa $\alpha_1(t) = (x(t), y(t), 0)$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$ dır.

Xoz düzlemi üzerine : $y = 0$ alınırsa $\alpha_2(t) = (x(t), 0, z(t))$

$x = x(t)$, $y = 0$, $z = z(t)$

yoz düzlemi üzerine : $x = 0$ alınırsa $\alpha_3(t) = (0, y(t), z(t))$

$x = 0$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ //

Örnek// $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinin koordinat düzlemlerine izdüşümlerinin denklemlerini bulun.

$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

i- $z=0 \Rightarrow \alpha_1(t)=(t,t^2,0)$

$\Rightarrow x=t \wedge y=t^2 \wedge z=0$ parametrik denklemdir.

$y=x^2$ kartezyen denklemdir. (paraboldür.)

ii- $y=0 \Rightarrow \alpha_2(t)=(t,0,t^3)$

$\Rightarrow x=t \wedge y=0 \wedge z=t^3$

$z=x^3$ kübik parabol.

iii- $x=0 \Rightarrow \alpha_3(t)=(0,t^2,t^3)$

$\Rightarrow x=0 \wedge y=t^2 \wedge z=t^3$

$y^3=t^6 \wedge z^2=t^6 \Rightarrow y^3=z^2$

n=3 halinde eğriliklerin (eğrilik ve burulmanın) geometrik anlamları:

$\alpha: I \to E^3$
$s \to \alpha(s)$ bir eğri ve s de onun yay parametresi olsun. Bu eğriyi bir $s_0 \in I$ noktasında Taylor serisine açalım.
($\alpha=\alpha(s) \wedge s_0$ noktasında.)

$$\alpha(s)=\alpha(s_0)+\alpha'(s_0)(s-s_0)+\alpha''(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2!}+\alpha'''(s_0)\frac{(s-s_0)^3}{3!}+\dots$$

$s-s_0=h$, $\alpha'(s_0)=\dfrac{d\alpha(s_0)}{ds}=T_0$
birim teğet vektör.

$$\Rightarrow \alpha''(s_0)=\frac{d^2\alpha(s_0)}{ds^2}=\frac{dT}{ds}(s_0)=(\mathcal{K}N)(s_0)=\mathcal{K}_0N_0$$

$$\Rightarrow \alpha'''(s_0)=\frac{d^3\alpha(s_0)}{ds^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)(s_0)=\frac{d}{ds}(\mathcal{K}N)(s_0)$$

$$=\left(\frac{d\mathcal{K}}{ds}N+\mathcal{K}\frac{dN}{ds}\right)(s_0)$$

$\alpha'''(s_0)=[\mathcal{K}'N+\mathcal{K}(-\mathcal{K}T+\tau B)](s_0)$ $\quad$ $\mathcal{K}=K$ aldım.

$=K_0'N_0-K_0^2T_0+\tau_0B_0K_0$

$$\alpha(s)=\alpha_0+hT_0+\frac{h^2}{2}K_0N_0+\frac{h^3}{6}(K_0'N_0-K_0^2T_0+K_0\tau_0B_0)+\dots$$

$$\alpha(s)-\alpha(0)=\left(h-\frac{h^3}{6}k_0^2+\cdots\right)T_0+\left(\frac{h^2}{2}k_0+\frac{h^3}{6}k_0+\cdots\right)N_0+\left(\frac{h^3}{6}k_0\tau_0+\cdots\right)B_0$$

$\alpha(s)-\alpha(0)\cong hT_0+\frac{h^2}{2}k_0N_0+\frac{h^3}{6}k_0\tau_0B_0$ alalım.

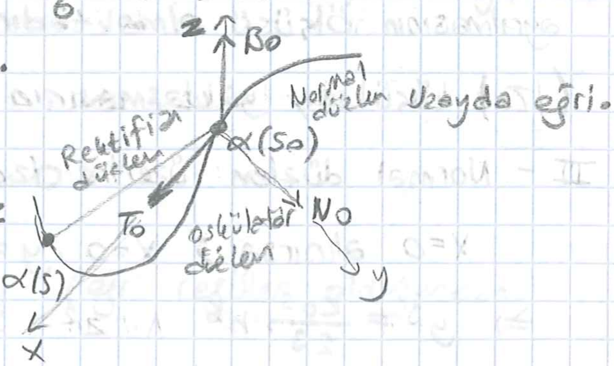
Özel olarak $\alpha(s_0)=0$ alalım.

$T_0=\vec{i}$ $\quad N_0=\vec{j}$ $\quad B_0=\vec{k}$

$h=x\,,\ \frac{h^2}{2}k_0=y\quad \frac{h^3}{6}k_0\tau_0=z$

alınabilir.

$\alpha(s)\cong(x,y,z)$



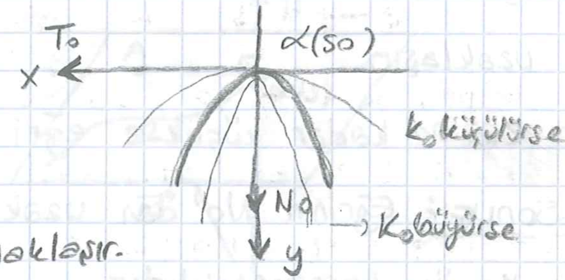
I - α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktası komşuluğunda oskülatör düzlem üzerine izdüşümünün denklemi :

$z=0$ alınırsa ; $x=h,\ y=\frac{h^2}{2}k_0\ ,\ z=0$ olur. (Par. denklem)

Kartezyen denklemini bulalım. Grafiğini çizelim.

$\Rightarrow\ y=\frac{k_0}{2}x^2$ (parabol)

$\left\{k=\left\|\frac{d^2x}{ds^2}\right\|=\left\|\frac{dT}{ds}\right\|\geq 0\right\}$



Eğer k_0 büyürse eğri N_0'a yaklaşır.

" k_0 küçülürse " T_0'a " .

Sonuç : k_0, eğrinin teğetinden ayrılmasının ölçüsüdür.

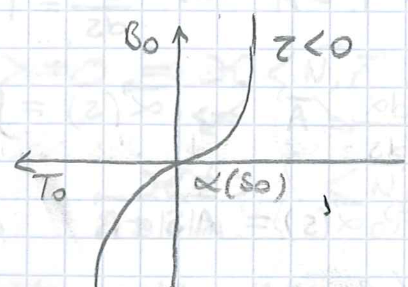
II - α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktası komşuluğunda rektifian düzlem üzerine izdüşümünün denklemi :

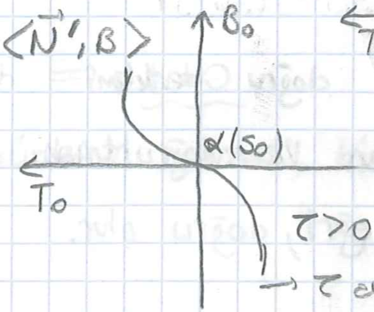
$y=0$ alınırsa ; $x=h\ ,y=0,\ z=\frac{h^3}{6}k_0\tau_0$ olur. (parametrik denk

Kartezyen denklemi ;

$z=\frac{k_0\tau_0}{6}x^3$ (kübik parabol)

$\tau=\langle V_2',V_3\rangle=\langle N',B\rangle$





$|\tau_0|$ ne kadar büyükse eğri T_0'dan o kadar uzaklaşmış olur.

Eğrinin burulması, rektifian düzlemdeki izdüşümün, teğetten ayrılmasının ölçüsü olmaktadır.

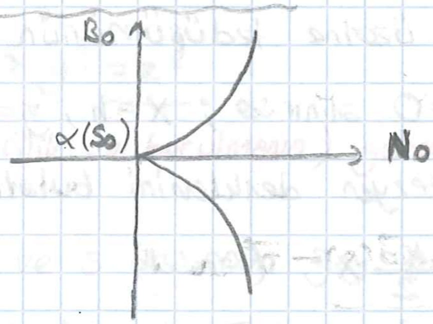
($|\tau_0|$ küçükse, yaklaşmasının ölçüsü olmaktadır.)

III - Normal düzlem üzerine izdüşüm :

$x=0$ alınırsa ; $x=0$, $y=\frac{h^2}{2}k_0$, $z=\frac{k_0\tau_0}{6}h^3$ (par. denk.)

$\Rightarrow y^3=\frac{k_0^3}{2^3}h^6 \wedge z^2=\frac{k_0^2\tau_0^2}{6^2}h^6$

$\Rightarrow \frac{2^3y^3}{k_0^3}=\frac{6^2z^2}{k_0^2\tau_0^2} \Rightarrow z^2=\frac{2}{9}\frac{\tau_0^2}{k_0}y^3$



$|\tau_0|$ ne kadar büyükse, eğrinin kolları N_0'dan o kadar uzaklaşır.

k_0 ne kadar küçükse eğri N_0'dan o kadar uzaklaşır.

Sonuç: Eğrinin N_0'dan uzaklaşması $|\tau_0|$ ile doğru orantılı, k_0 ile ters orantılıdır.

Teorem: E^3 de bir eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart $\varkappa=0$ olmasıdır.

İspat// $\Leftarrow$: $\varkappa=0$ olsun.

$\Rightarrow \frac{dT}{ds}=\vec{T}'=k\vec{N} \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds}=0$

$\Rightarrow \vec{T}=\vec{A} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds}=\vec{T}=\vec{A}$

$\frac{d\alpha}{ds}=\vec{A} \Rightarrow \vec{\alpha}(s)=\int\vec{A}\,ds \Rightarrow \vec{\alpha}(s)=\vec{A}\int ds$

$\Rightarrow \vec{\alpha}(s)=\vec{A}s+\vec{B}$ doğru denklemi

(B noktasından geçen ve doğrultmanı A olan)

Eğrilik sıfır ise eğri, doğru olur.

$\Rightarrow$: $\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir doğru olsun.
$\qquad s \longrightarrow \alpha(s)$

$\vec{\alpha}(s) = \vec{A}\lambda + \vec{B} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{A}\lambda + \vec{B}$ (A,B sabit, λ değişken)

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\lambda} = \vec{A} \qquad \alpha'' = \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} = 0$$

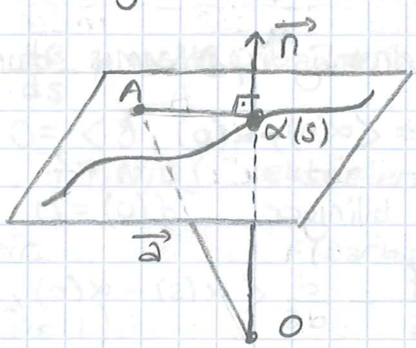
$\Rightarrow \alpha' \wedge \alpha'' = 0 \;\wedge\; \|\alpha'\| \neq 0$ (eğri regüler olduğundan)

$\Rightarrow \kappa = 0$ olur. //

Teorem: (Bir eğrinin düzlemsel olup olmadığını veren teorem):

E^3 de bir α eğrisinin, düzlemsel olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır. (İkinci eğrilik sıfır olmalıdır.)

İspat// $\Rightarrow$: α eğrisi düzlemsel bir eğri olsun.



$\vec{A\alpha} = \vec{\alpha}(s) - \vec{a} \perp \vec{n}$

$\Rightarrow \langle \vec{\alpha}(s) - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\langle \vec{\alpha}(s) - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$

türevi sıfır.

$\Rightarrow \langle \frac{d\alpha}{ds}, \vec{n} \rangle + 0 = 0$

$\alpha : I \longrightarrow E^3$, $s \longrightarrow \alpha(s)$ s yay parametresi $\Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{n} \rangle = 0$

Eğer $n = a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}$ şeklinde yazılırsa

$\Rightarrow a = \langle \vec{n}, \vec{T} \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\langle \vec{n}, \vec{T} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n} \rangle + 0 = 0$

$\Rightarrow \langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \kappa \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \kappa \langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0$

$\kappa \neq 0$ alalım. $\langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0$ olmalı

$\Rightarrow \langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0 = b \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow \vec{n} = c\vec{B}$ düzlemin normali, binormali yönündedir.

$\|\vec{n}\| = 1$ alabiliriz. $\Rightarrow 1 = \|\vec{n}\| = \|c\vec{B}\|$

$\Rightarrow 1 = |c| \cdot \underbrace{\|\vec{B}\|}_{1} \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \mp 1$

$\Rightarrow \vec{n} = \mp \vec{B}$ türev alırsak,

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{n}}{ds} = \vec{0} = \mp \dfrac{d\vec{B}}{ds} \Rightarrow \dfrac{dB}{ds} = \vec{0} \Rightarrow -\tau \vec{N} = \vec{0}$

$\vec{N} \neq \vec{0}$ $\quad -\tau = 0$

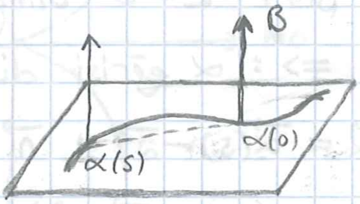
$\tau = 0$

$\Leftarrow$: Burulma $\tau = 0$ olsun.

$B' = \dfrac{dB}{ds} = -\tau N = 0 \Rightarrow \dfrac{dB}{ds} = 0 \Rightarrow B = \text{sabit}$

Burulması sıfır olan eğrinin binormali sabit olur.

Eğri, binormale dik olan düzlem içinde bulunduğunu ispatlamalıyız.



$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle = 0$ olduğunu gösterirsek ispatlamış olur.

$f(0) = \langle \alpha(0) - \alpha(0), B \rangle = 0$

olduğu biliniyor. $f(0) = 0$ dır.

$\Rightarrow \dfrac{df}{ds} = \dfrac{d}{ds} \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$

$= \left\langle \dfrac{d\alpha}{ds}, B(s) \right\rangle + \left\langle \alpha(s) - \alpha(0), \dfrac{dB}{ds} \right\rangle$

$= \underbrace{\langle T(s), B(s) \rangle}_{0} + \langle \alpha(s) - \alpha(0), \underbrace{-\tau . N}_{0} \rangle$

$\Rightarrow \dfrac{df}{ds} = 0 \Rightarrow f(s) = \text{sabit} = c$

$\Rightarrow f(0) = c = 0$ $\qquad f(s) = 0$ ise

$\Rightarrow \langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle = 0$ olur.

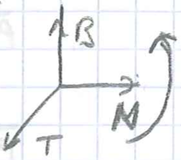
α, B'ye dik olan düzlemdedir. $\Rightarrow \alpha$ düzlemseldir.

Soru: $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$s \longrightarrow \alpha(s)$ eğrisi, $\{T, N, B\}$ de Frenet vektörleri olsun. $\dfrac{dT}{ds} = \vec{W} \wedge T$, $\dfrac{dN}{ds} = \vec{W} \wedge N$, $\dfrac{dB}{ds} = \vec{W} \wedge B$

olacak şekilde, bir $\vec{W}$ vektörü bulun.

Çözüm// $\vec{W} = a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}$ olsun.

$\Rightarrow \vec{W} \wedge \vec{T} = (a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}) \wedge \vec{T} = -b\vec{B} + c\vec{N} = \dfrac{dT}{ds}$



$\Rightarrow \varkappa N = -b\vec{B} + c\vec{N}$

$\Rightarrow \underline{c = \varkappa}\ ,\ \underline{-b = 0}$

$\Rightarrow \vec{W} \wedge \vec{B} = (a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}) \wedge \vec{B} = -a\vec{N} + b\vec{T} = \dfrac{dB}{ds}$

$\Rightarrow -\tau\vec{N} = -a\vec{N} + b\vec{T}$

$\Rightarrow \underline{a = \tau}\ ,\ b = 0$

$\vec{W} = \tau\vec{T} + \varkappa\vec{B}$ //

Seçim — 24.12.95 / Pazar.

Tanım: $\dfrac{dT}{ds} = W \wedge T$ $\dfrac{dN}{ds} = W \wedge N$, $\dfrac{dB}{ds} = W \wedge B$ bağıntılarını

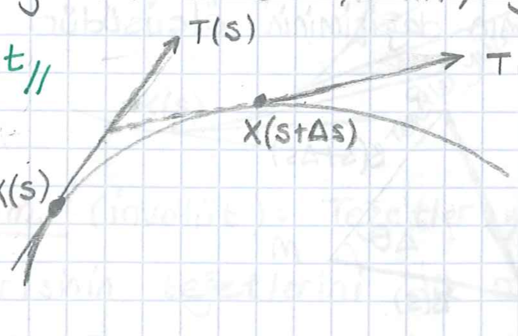
sağlayan $W = \tau T + \varkappa B$ vektörüne, $\{T, N, B\}$ vektörlerinin DARBOUX DÖNME VEKTÖRÜ denir. :(Darbo)

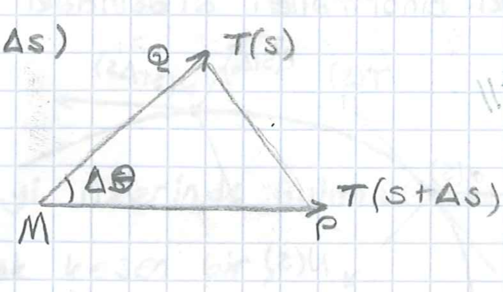
Teorem: (Eğriliğin Geometrik Mânâsı):

$\alpha : I \longrightarrow E^3$, C^2 sınıfından bir eğri, s de onun yay parametresi olsun. $T(s)$ ve $T(s+\Delta s)$ de komşu $\alpha(s+\Delta s)$ ve $\alpha(s)$ noktalarındaki birim teğet vektörleri, $\Delta\theta$ da bu teğetler arasındaki açı olsun. $\Delta s > 0$ olmak üzere

$$\varkappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$ (yani $\varkappa$ eğriliği, eğrinin teğetler arası açısının, değişiminin ölçüsüdür.)

İspat//





$\|T(s)\|=1 \quad \wedge \quad \|T(s+\Delta s)\|=1$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\,\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}\cos\Delta\theta$$

$$\overline{PQ}^2 = 2 - 2\cos\Delta\theta$$

$$\overline{PQ}^2 = 2(1-\cos\Delta\theta)$$

$$\overline{PQ}^2 = 2\left[1-\left(1-2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]$$

$$\overline{PQ}^2 = 4\sin^2\frac{\Delta\theta}{2} \Rightarrow \overline{PQ} = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2} \quad //$$

$$\overline{PQ} = \|\overrightarrow{QP}\| = \|T(s+\Delta s)-T(s)\| = \|\overrightarrow{\Delta T}(s)\|$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$x = \frac{\Delta\theta}{2}$ yazılırsa,

$$\Rightarrow \sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{\Delta T}\| = 2\left[\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3}{3!} + \dots\right]$$

$\frac{1}{\Delta s}$ ile çarpıp, $\Delta\theta$ parantezinde

$$\Rightarrow \frac{\|\overrightarrow{\Delta T}\|}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}\left[1 - \frac{\Delta\theta^2}{2^2 \cdot 3!} + \dots\right]$$

$\Delta s > 0$

$\Rightarrow \Delta s \to 0$ limit alınırsa,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\Delta T}{\Delta s}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\left[1-\frac{\Delta\theta^2}{2^2 3!}+\dots\right]$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}\right\| = \frac{d\theta}{ds}$$

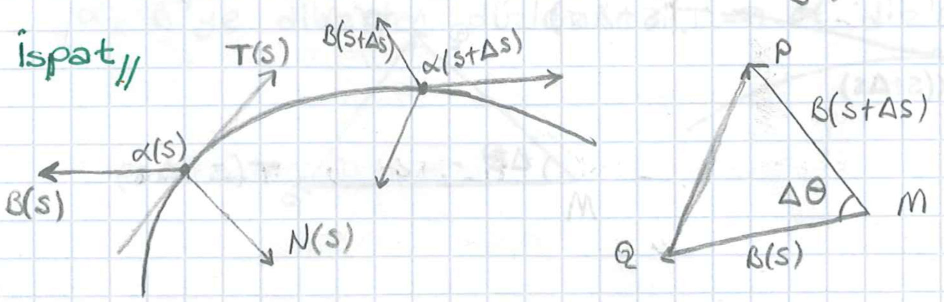
$\Big\}\; T(s+\Delta s) \longrightarrow T(s)$

$$\Rightarrow \|\kappa \underset{1}{N}\| = \frac{d\theta}{ds} \Rightarrow \kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad //$$

Teorem: (Burulmanın Geometrik Mânâsı):

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisinin burulması, eğrinin komşu noktalarındaki binormalleri arasındaki açının değişiminin ölçüsüdür.

İspat //



$\overset{\triangle}{MPQ}$ da kosinüs teoremi, M köşesi için ;

$$\overline{QP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\,\overline{MP}.\overline{MQ}\cos\Delta\theta$$

$$\|B(s)\| = 1 = \overline{MQ} \quad \wedge \quad \|B(s+\Delta s)\| = 1 = \overline{MP}$$

$$\overline{QP}^2 = 2 - 2\cos\Delta\theta$$

$$\overline{QP}^2 = 4\sin^2\frac{\Delta\theta}{2} \Rightarrow \overline{QP} = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\overline{QP} = \|\overrightarrow{QP}\| = \|B(s+\Delta s) - B(s)\| = \|\Delta B(s)\|$$

$$\|\Delta B(s)\| = \Delta\theta\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2^2 3!} + \dots\right) \qquad \Delta s > 0$$

$\frac{1}{\Delta s}$ ile her iki tarafı çarparsak,

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta B(s)\|}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2^2 3!} + \dots\right)$$ ve $\Delta s \to 0$ limit alarak,

$$\Rightarrow \lim_{\Delta s \to 0}\left\|\frac{\Delta B(s)}{\Delta s}\right\| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2^2 3!} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = \frac{d\theta}{ds} \Rightarrow \|-\tau N\| = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\Rightarrow |-\tau|.\|N\| = \frac{d\theta}{ds} \Rightarrow |\tau| = \frac{d\theta}{ds} \quad //$$

Bir eğrinin burulması, yay parametresine göre değişiminin ölçüsüdür.

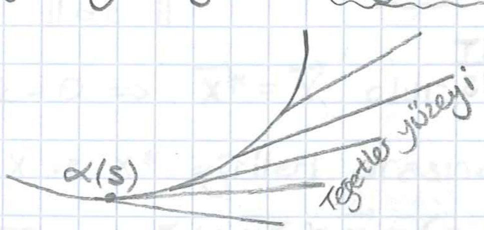
Özel Eğriler

A- İNVOLÜT (BASİT), EVOLÜT (MEBSUT) eğrileri

Tanım: (Teğetler Yüzeyi):

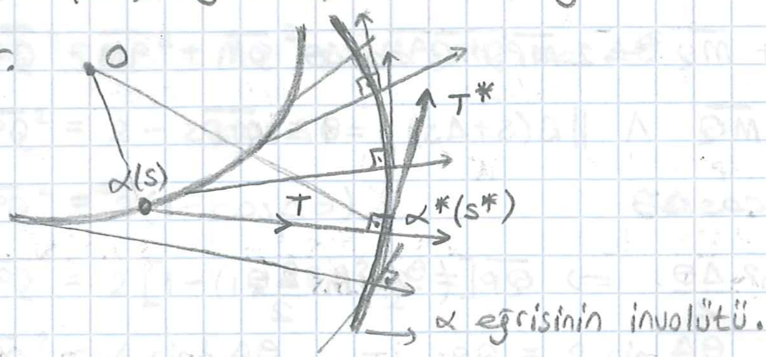
Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin tüm teğetleri bir yüzey çizer.

Bu yüzeye eğrinin teğetler yüzeyi denir.



Tanım: (İnvolüt): Teğetler yüzeyi üzerinde bulunan ve α eğrisinin teğetlerini dik olarak kesen bir,

$\alpha^* = \alpha^*(s^*)$ eğrisine, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin bir involütü (basit) denir.



$X = X(s)$ eğri, $\{T, N, B\}$ Frenet vektörleri, s yay parametresi.

$X^* = X^*(s^*)$ involüt, $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet vektörleri, s^* yay parametresi

$\Rightarrow \vec{T} \perp \vec{T}^* \Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = \underset{\downarrow \text{sıfır.}}{0}$ dır.

$\overrightarrow{O\alpha^*} = \overrightarrow{O\alpha} + \overrightarrow{\alpha\alpha^*}$ $\qquad \overrightarrow{\alpha\alpha^*} = k\vec{T}, \quad k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha^* = \alpha + k\vec{T}$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{d\alpha^*}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{dk}{ds}\vec{T} + k\frac{dT}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha^*}{ds} = \vec{T} + \frac{dk}{ds}\vec{T} + k\varkappa\vec{N}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha^*}{ds} = \left(1 + \frac{dk}{ds}\right)\vec{T} + k\varkappa\vec{N}$$

$$\Rightarrow 0 = 1 + \frac{dk}{ds} \Rightarrow k = -s + c$$

→ yay parametresi.
→ integral sabiti.

$$\Rightarrow k = c - s$$

$T^* = \dfrac{d\alpha^*}{ds^*}$

$T^* \parallel \dfrac{d\alpha^*}{ds}$

$T \perp T^* \parallel \dfrac{d\alpha^*}{ds}$

$T \perp \dfrac{d\alpha^*}{ds}$

$\left\langle T, \dfrac{d\alpha^*}{ds} \right\rangle = 0$

$\alpha^* = \alpha + k\vec{T} \Rightarrow \alpha^* = \alpha(s) + (c-s)T$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)T}$ involüt denklemidir.

involütün Özellikleri :

1- $\dfrac{d\alpha^*}{ds} = \dfrac{d\alpha}{ds} - T + (c-s)\dfrac{dT}{ds}$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha^*}{ds} = \cancel{T} - \cancel{T} + (c-s)\varkappa N$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha^*}{ds} = (c-s)\varkappa N = \vec{0}$$

→ $c - s \neq 0$

→ $\vec{N} \neq \vec{0}$

→ $\varkappa = 0$

O halde $\varkappa = 0$ olmalıdır.

Sıfırdan farklı ise $\varkappa \neq 0$ olur.

Özellik : α^*, involütünün regüler olması için $\varkappa \neq 0$ olmalıdır.

2 - İnvolütün eğriliği : $(\varkappa^* = ?)$

$$\varkappa^* = \frac{\|\alpha^{*\prime} \wedge \alpha^{*\prime\prime}\|}{\|\alpha^{*\prime}\|^3} \quad , \quad \alpha^{*\prime} = \frac{d\alpha^*}{ds} = (c-s)\varkappa \vec{N}$$

$$\alpha^{*\prime\prime} = \frac{d^2\alpha^*}{ds^2} = -\varkappa N + (c-s)\frac{d\varkappa}{ds}\vec{N} + (c-s)\frac{dN}{ds}\varkappa$$

$$= -\varkappa N + (c-s)\frac{d\varkappa}{ds} N + (c-s)\varkappa\left[-\varkappa\vec{T} + \tau\vec{B}\right]$$

$$\alpha^{*\prime\prime} = -(c-s)\varkappa^2\vec{T} + \left[-\varkappa + (c-s)\frac{d\varkappa}{ds}\right]\vec{N} + (c-s)\varkappa\tau\vec{B}$$

$$\alpha^{*\prime} \wedge \alpha^{*\prime\prime} = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & (c-s)\varkappa & 0 \\ -(c-s)\varkappa^2 & -\varkappa + (c-s)\frac{d\varkappa}{ds} & (c-s)\varkappa\tau \end{vmatrix}$$

$$\alpha^{*\prime} \wedge \alpha^{*\prime\prime} = (c-s)^2\varkappa^2(\tau\vec{T} + \varkappa\vec{B})$$

$$\|\alpha^{*\prime} \wedge \alpha^{*\prime\prime}\| = (c-s)^2\varkappa^2\sqrt{\tau^2 + \varkappa^2}$$

$$\|\alpha^{*\prime}\| = |c-s|^3\varkappa^3$$

$$\Rightarrow \varkappa^* = \frac{(c-s)^2\varkappa^2\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}}{(c-s)^2|c-s|\varkappa^3} = \frac{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}}{|c-s|\varkappa} \quad //$$

3 - İnvolütün burulması :

$$\tau^* = \frac{[\alpha^{*\prime}, \alpha^{*\prime\prime}, \alpha^{*\prime\prime\prime}]}{\|\alpha^{*\prime} \wedge \alpha^{*\prime\prime}\|} = ? \quad // \quad \Rightarrow \tau^* = \frac{\frac{d}{ds}\left(\arctan\frac{\tau}{\varkappa}\right)}{\varkappa(c-s)} \quad //$$

izinliyim. 29/12/95 CUMA

4 - $\vec{X}^* = \vec{X} + k\vec{T}$

$$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{X}^*}{dk}\right\| = 1$$

Sonuç : k involütün yay parametresidir.

5 - $k = 0 \Rightarrow \vec{X}^* = \vec{X}$ olur.

X ve X^* eğrileri arasındaki uzaklık $|k| = |c-s|$

6 - Eğer $c_1^* : \vec{X}^* = \vec{X} + (c_1 - s)\vec{T}$ ve

$c_2^* : \vec{X}_1^* = \vec{X} + (c_2 - s)\vec{T}$ $\quad \vec{X}(s)$ eğrisinin iki involütü ise,

$$\|x^* - x_1^*\| = \|\vec{X} + (c_1 - s)\vec{T} - \vec{X} + (c_2 - s)\vec{T}\| = |c_1 - c_2| . \|\vec{T}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{X} - \vec{X}^*\| = |c_2 - c_1| = \text{sabit}.$$

Sonuç: bu eğrinin iki involütü arasındaki uzaklık daima sabittir.

Örnek // $X : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, $\vec{X}(s) = a\cos t\,\vec{e_1} + a\sin t\,\vec{e_2} + bt\,\vec{e_3}$, $a > 0, b \neq 0$

bir involüt denklemini bulunuz.

Çözüm // $\vec{X^*} = \vec{X}(s) + (c - s)\vec{T}$, $c \in \mathbb{R}$ ve özel olarak (kolaylık olsun diye)

$c = 0$ alalım. $\Rightarrow \vec{X^*} = \vec{X}(s) - s\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{\vec{X'}}{\|X'\|} = \frac{-a(\sin t)\vec{e_1} + a(\cos t)\vec{e_2} + b\,\vec{e_3}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$s = \int_0^t \|\vec{X'}\|\, dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}.\, t$$

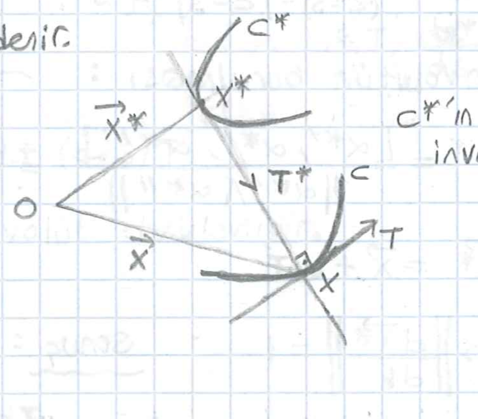
$$\Rightarrow \vec{X^*} = (a\cos t, a\sin t, bt) - \sqrt{a^2+b^2}\, t \left(-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$X^* = [a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t), 0]$ eğrinin involüt denklemi

$= (a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t), 0)$ düzlemsel bir eğri.

Tanım: (Evolüt = Mebsut):

Eğer bir c eğrisi bir c^* eğrisinin involütü ise c^* eğrisine c eğrisinin evolütü denir.



Evolütün Özellikleri:

1- $\vec{OX^*} = \vec{OX} + \vec{XX^*}$

$\Rightarrow \vec{X^*} = \vec{X} + \vec{XX^*}$

$\vec{XX^*} = \lambda\vec{T} + \alpha\vec{N} + \beta\vec{B} \Rightarrow \vec{XX^*} \perp \vec{T} \Rightarrow \langle \vec{XX^*}, \vec{T} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\boxed{X^* = \vec{X} + \alpha\vec{N} + \beta\vec{B}}$ // evolüt denklemidir.

2 – $\vec{X}=\vec{X}(s)$ nin s yay parametresine göre türev alırsak,

$$\frac{d\vec{X}^*}{ds}=\frac{d\vec{X}}{ds}+\frac{d\alpha}{ds}\vec{N}+\alpha\frac{d\vec{N}}{ds}+\frac{d\beta}{ds}\vec{B}+\beta\frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{dX^*}{ds}=\vec{T}+\frac{d\alpha}{ds}N+\alpha(-\varkappa\vec{T}+\tau\vec{B})+\frac{d\beta}{ds}B+\beta\tau N$$

$$\frac{dX^*}{ds}=(1-\alpha\varkappa)\vec{T}+\left(\frac{d\alpha}{ds}-\beta\tau\right)\vec{N}+\left(\frac{d\beta}{ds}+\alpha\tau\right)\vec{B}$$

$$\frac{dX^*}{ds^*}=T^*\,//\,\underbrace{\frac{dX^*}{ds}\,//\,\vec{XX^*}=\vec{X}^*-\vec{X}=\alpha\vec{N}+\beta\vec{B}}_{\text{katsayıları orantılıdır.}}$$

$$\frac{\frac{d\alpha}{ds}-\beta\tau}{\alpha}=\frac{\frac{d\beta}{ds}+\alpha\tau}{\beta}=\lambda \text{ dersek}, \quad 1-\alpha\varkappa=0$$

$$1-\alpha\varkappa=0 \;\wedge\; \alpha'-\beta\tau=\lambda\alpha \;\wedge\; \beta'+\alpha\tau=\lambda\beta$$

eğer $\varkappa\neq 0$ ise $\alpha=\frac{1}{\varkappa}=\rho$

$$\Rightarrow \beta(\alpha'-\beta\tau)=\lambda\beta\alpha \;\wedge\; \alpha(\beta'+\alpha\tau)=\lambda\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \beta(\alpha'-\beta\tau)-\alpha(\beta'+\alpha\tau)=0$$

$$\Rightarrow \beta\alpha'-\alpha\beta'-\tau(\alpha^2+\beta^2)=0 \Rightarrow \frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha^2+\beta^2}=\tau$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha^2}}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}=\tau \quad \left\{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'=-\frac{\beta'\alpha-\alpha'\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\alpha^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\tau \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arccot}\frac{\beta}{\alpha}\right)=\tau$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot}\frac{\beta}{\alpha}=\int\tau\,ds+c \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\cot\left(\int\tau\,ds+c\right)$$

$$\Rightarrow \beta=\alpha\cot(\tau\,ds+c) \Rightarrow \beta=\rho\cot(\tau\,ds+c)$$

$\vec{X}^*=\vec{X}+\alpha\vec{N}+\beta\vec{B} \Rightarrow$ X eğrisinin evolüt denklemi.

$\vec{X}^*=\vec{X}+\rho\vec{N}+\rho\left(\cot\left[\int\tau\,ds+c\right]\right)\vec{B}$ dır.

3- $\frac{d\vec{X}^*}{ds} = (\alpha' - \beta\tau)\vec{N} + (\beta' + \tau\alpha)\vec{B}$ olduğundan, evolütün regüler olması için,

$$\frac{d\vec{X}^*}{ds} \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{X}^*}{ds} \right\| \neq 0 \Rightarrow (\alpha' - \beta\tau)^2 + (\beta' + \tau\alpha)^2 \neq 0 \text{ olmalıdır.}$$

4- Eğer evolüt regüler değilse, $(\alpha' - \beta\tau)^2 + (\beta' + \tau\alpha)^2 = 0$ olmalıdır.

5- c eğrisi bir düzlensel eğri ise $\tau = 0$ olduğundan,

$$(\alpha' - \beta\tau)^2 + (\beta' + \tau\alpha)^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = \frac{\kappa'^2}{\kappa^4}$$

$\alpha = \rho = \frac{1}{\kappa}$ $\quad \beta = \rho \cot\left(\int \tau ds + c\right)$

$= \rho \cot c = \rho\gamma \Rightarrow \beta' = \rho'\gamma = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\cdot\gamma \Rightarrow \kappa \neq 0$ olmalı

$\alpha' = \frac{\kappa'}{\kappa^2}$ $\quad \cot c = \gamma = \text{sabit}$

Sonuç: Düzlensel bir eğrinin regüler olması için $\kappa' \neq 0$ olmalıdır.

Eğilim Çizgileri (Genel Helisler)

Tanım: Sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan eğrilere, eğilim çizgileri denir. (Veya genel helis denir.)

Tanım: a- Sabit doğrultuya, helisin ekseni denir. $\boxed{\vec{U} = T\cos\theta + B\sin\theta}$

b- Sabit açıya, helisin eğilim açısı denir. $\boxed{\cot\theta = \frac{\tau}{\kappa}}$

Teorem: Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin, eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $H = \frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ olmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: $\vec{X} = \vec{X}(s)$ bir eğilim çizgisi olsun.

$\Rightarrow \frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{T}$ olmak üzere, eğri bir $\vec{U}$ = sabit vektörü ile, θ sabit açısını yaparsa $\Rightarrow \measuredangle(\vec{U}, \vec{T}) = \theta$ olsun. $\Rightarrow \vec{U}$ birim vektör olsun. Yani $\|\vec{U}\| = 1 \Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos\theta$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \frac{d}{ds}\cos\theta$$

$$\left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{U} \right\rangle + \langle T, \underbrace{\frac{d\vec{U}}{ds}}_{0} \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{U} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle \kappa\vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$$

$$\kappa \langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0 \begin{cases} \kappa = 0 \\ \langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0 \end{cases}$$

$\kappa \neq 0$ olmalı. $\kappa = 0$ olsaydı eğri, doğru olurdu.

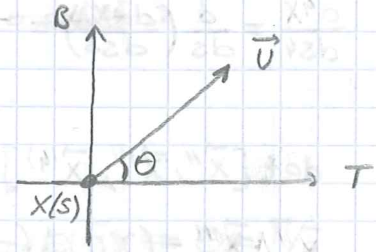
O halde $\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$ olmalıdır.

Eğer $\vec{U} = \alpha \vec{T} + \beta \vec{N} + \gamma \vec{B}$ ise $\beta = \langle \vec{U}, \vec{N} \rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{U} = \alpha \vec{T} + \gamma \vec{B}$ olmalıdır. $\langle \vec{U}, \vec{N} \rangle = 0$ dan türev alırsak,

$\left\{ \frac{d\vec{U}}{ds} = 0 \text{ idi.} \right\}$ $\Rightarrow \langle \frac{d\vec{N}}{ds}, \vec{U} \rangle = 0 \Rightarrow \langle -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}, \vec{U} \rangle = 0$

$\Rightarrow -\kappa \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle + \tau \langle \vec{B}, \vec{U} \rangle = 0$



$\Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \|\vec{T}\| \, \|\vec{U}\| \cos\theta = \cos\theta$

$\langle \vec{B}, \vec{U} \rangle = \cos(90 - \theta) = \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow H = \frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta = 0 \Rightarrow H = \frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ //

$\Leftarrow$: $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ olsun. $\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$ olan, θ açısı vardır.

$\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow -\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta = 0$

Eğer $\vec{U} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$ vektörünü alırsak, ($\theta = \text{sabit}$)

$\Rightarrow \vec{U}' = \frac{dU}{ds} = -(-\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta)\vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \text{sabit}$

$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos\theta = \text{sabit} \Rightarrow$ eğri, eğilim çizgisidir. //

Problemler

1- Bir $\vec{X} = \vec{X}(s)$ eğrisinin ($X : I \longrightarrow E^3$) eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart,

$$\det\left[\frac{d^2\vec{X}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{X}}{ds^3}, \frac{d^4\vec{X}}{ds^4}\right] = 0$$ olmasıdır. Gösteriniz.

2- Parametrik denklemi $X : I \longrightarrow E^3$ $X = (x_1, x_2, x_3)$

$x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{2}t^2$, $x_3 = \frac{1}{6}t^3$ olan eğrinin eğilim çizgisinin olup olmadığını araştırınız. Eğilim çizgisi varsa, eksenini ve eğilim açısını bulunuz.

Çözümler

1 − $\frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{T}$, $\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = \varkappa \vec{N}$

$$\frac{d^3X}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right) = \frac{d}{ds}(\varkappa\vec{N}) = \varkappa' N + \varkappa\frac{dN}{ds} = \varkappa' N + \varkappa(-\varkappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$$\frac{d^3X}{ds^3} = -\varkappa^2\vec{T} + \varkappa'\vec{N} + \varkappa\tau\vec{B}$$

$$\frac{d^4X}{ds^4} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^3X}{ds^3}\right) = -2\varkappa\varkappa'\vec{T} - \varkappa^2(\varkappa\vec{N}) + \varkappa'\vec{N} + \varkappa'(-\varkappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + (\varkappa'\tau + \varkappa\tau')\vec{B} + \varkappa\tau(-\tau\vec{N})$$

$\det[\vec{X}'', \vec{X}''', \vec{X}^{(4)}] = \langle \vec{X}'' \wedge \vec{X}''', \vec{X}^{(4)} \rangle$ idi.

$$\vec{X}'' \wedge \vec{X}''' = (\varkappa\vec{N}) \wedge (-\varkappa^2\vec{T} + \varkappa'\vec{N} + \varkappa\tau\vec{B}) = \varkappa^3 B + \varkappa^2\tau\vec{T}$$

$$\frac{d^4X}{ds^4} = T(-3\varkappa\varkappa') + (\_\_\_)\vec{N} + \vec{B}(2\varkappa'\tau + \varkappa\tau')$$

$$\det[\langle X'' \wedge X''', X^{(4)} \rangle] = \varkappa^2\tau(-3\varkappa\varkappa') + \varkappa^3(2\varkappa\tau + \varkappa\tau')$$

$$= -3\varkappa^3\tau\varkappa' + 2\varkappa^3\varkappa'\tau + \varkappa^4\tau'$$

$$= -\varkappa^3\tau\varkappa' + \varkappa^4\tau'$$

$$= \varkappa^3(\varkappa\tau' - \tau\varkappa')\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2}$$

$$= \varkappa^5\frac{\varkappa\tau' - \tau\varkappa'}{\varkappa^2} = \varkappa^5\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)'$$

$$\det[X'', X''', X^{(4)}] = \varkappa^5\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)' = 0 \iff \left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)' = 0 \iff \frac{\tau}{\varkappa} = \text{sabit}$$

$\iff$ c eğilim eğrisidir.

31.12.1995 / c.tesi.

Örnek // $X(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3)$ $X: \mathbb{R} \to E^3$

eğilim çizgisi olup olmadığını araştırın. Eğilim çizgisi ise eksenini ve eğilim açısını bulunuz.

$\frac{\tau}{\varkappa} = \text{sabit}$ $X' = (1, t, \frac{t^2}{2})$ $X'' = (0, 1, t)$

$$X' \wedge X'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = \left(\frac{t^2}{2}, -t, 1\right)$$

$\mathcal{K} = \dfrac{\|x' \wedge x''\|}{\|x'\|^3}$ idi. $\|x' \wedge x''\| = \sqrt{t^4/4 + t^2 + 1} = \dfrac{t^2}{2} + 1$

$\|x'\| = \sqrt{1 + t^2 + t^2/4} = 1 + \dfrac{t^2}{2}$

$$\mathcal{K} = \frac{\frac{t^2}{2} + 1}{\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2}$$

$$\tau = \frac{\det[x', x'', x''']}{\|x' \wedge x''\|^2} = \frac{\langle x' \wedge x'', x''' \rangle}{\|x' \wedge x''\|^2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2} \Rightarrow \frac{\tau}{\mathcal{K}} = \frac{1/(t^2/2 + 1)^2}{1/(t^2/2 + 1)^2} = 1 = \text{sabit}$$

$\dfrac{\tau}{\mathcal{K}} = 1 \Rightarrow$ eğri, eğilim çizgisidir.

Eğilim açısı, $\dfrac{\tau}{\mathcal{K}} = \cot\theta$ dır. $\Rightarrow \dfrac{\tau}{\mathcal{K}} = \cot\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$

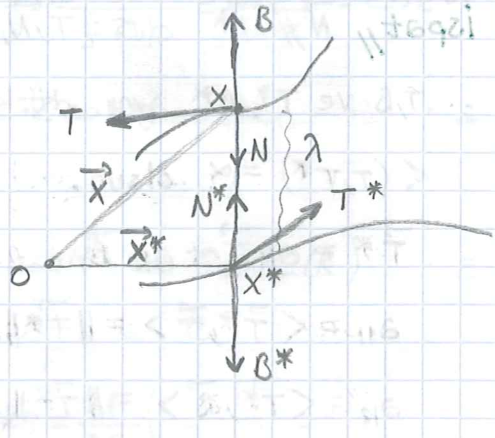
eğilim ekseni, $\vec{U} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$

$\vec{U} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{T} + \vec{B})$ dir. //

Bertrand Eğri Çiftleri

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ ve $\beta : I \longrightarrow E^3$ iki eğri olsunlar.
$s \longrightarrow x(s)$ $\quad s^* \longrightarrow x^*(s^*)$

Bu eğrileri sırasıyla c ve c^* ile gösterelim. Eğer bu eğrilerin karşılıklı noktalarındaki aslî normalleri aynı doğrultuda ise bu eğrilere Bertrand eğrileri denir. Veya Bertrand eğri çifti teşkil ediyorlar denir.



$(c) : \vec{x} = \vec{x}(s) \quad \{T, N, B\}, \mathcal{K}, \tau$

$(c^*) : \vec{x}^* = x^*(s^*) \quad \{T^*, N^*, B^*\}, \mathcal{K}^*, \tau^*$

$N = N^*$, (aynı doğrultuda olduğu için, tanımdan dolayı eşit alabiliriz.)

$$\vec{OX^*} = \vec{OX} + \vec{XX^*} \Rightarrow \vec{x^*} = \vec{x} + \lambda\vec{N}$$

$$\Rightarrow (c^*) : \vec{x}^* = \vec{x} + \lambda\vec{N} \Rightarrow \frac{dx^*}{ds} = \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\vec{N} + \lambda\frac{d\vec{N}}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^*}{ds} = \vec{T} + \frac{d\lambda}{ds}\vec{N} + \lambda(-\mathcal{K}\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$\Rightarrow \dfrac{dx^*}{ds} = (1-\lambda\kappa)\vec{T} + \dfrac{d\lambda}{ds}\vec{N} + \lambda\tau\vec{B}$

Ayrıca $N = N^*$ olduğundan, $T^* \parallel \dfrac{dx^*}{ds}$. $\left\{ T^* = \dfrac{dx^*}{ds^*} \text{ idi.} \right\}$

$\vec{N}^* \perp \vec{T}^*$ olduğuna göre,

$\vec{N} \perp \dfrac{dx^*}{ds}$ dir. $\langle \vec{N}, \dfrac{dx^*}{ds} \rangle = 0$ olmalıdır. $\Rightarrow \dfrac{d\lambda}{ds} = 0$ olur.

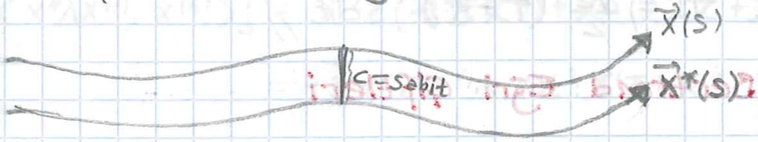
$\Rightarrow \lambda = c =$ sabit $\Rightarrow$ $\underline{x^* = \vec{x} + c\vec{N}}$ // $c =$ sabit.

Özellikler :

1 – $\vec{x} = \vec{x}(s)$ ve $\vec{x}^* = x^*(s)$ bertrand eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık :

$\vec{x}x^* = \|\vec{x}x^*\| = \|\vec{x}^* - \vec{x}\| = \|\vec{x} + c\vec{N} - \vec{x}\| = \|c\vec{N}\| = |c|.\|\vec{N}\| = |c| =$ sabit

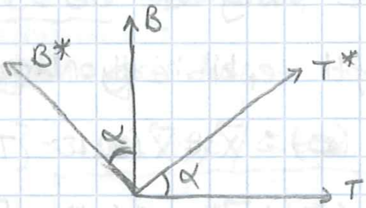
Sonuç: Bertrand eğri çiftini teşkil eden eğriler, birbirinden sabit uzaklıkta (paralel) olan eğrilerdir.



2 – Teorem : Bertrand eğri çiftine dahil olma bir denklik bağıntısıdır.

3 – $\vec{x}$ ve $\vec{x}^*$ bertrand eğri çifti teşkil ediyorlarsa, eğrilik ve burulmaları arasında, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ bağıntısı vardır.

İspat// $\vec{N} \parallel \vec{N}^*$ dır. $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}, \{\vec{T}^*, \vec{N}^*, \vec{B}^*\}$



∴ T, B ve T^*, B^* aynı düzlemdedirler.

$\sphericalangle(T, T^*) = \alpha$ olsun.

T ve B $\perp$ N, T^* ve B^* $\perp N^*$ $\Rightarrow$ T, B, T^*, B^* aynı düzlem üzerindedir.

$\vec{T}^* = a_{11}\vec{T} + a_{12}\vec{B}$

$a_{11} = \langle \vec{T}^*, \vec{T} \rangle = \underbrace{\|\vec{T}^*\|}_{1}.\underbrace{\|\vec{T}\|}_{1}.\cos\alpha = \cos\alpha$

$a_{12} = \langle \vec{T}^*, \vec{B} \rangle = \|\vec{T}^*\|.\|\vec{B}\| \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\vec{T}^* = a_{11}\vec{T} + a_{12}\vec{B} = \vec{T}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha$

$\vec{B}^* = a_{21}\vec{T} + a_{22}\vec{B} = -\vec{T}\sin\alpha + \vec{B}\cos\alpha$

$$a_{21} = \langle \vec{B}^*, \vec{T} \rangle = \|\vec{B}^*\| . \|\vec{T}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$a_{22} = \langle \vec{B}^*, \vec{B} \rangle = \|\vec{B}^*\| . \|\vec{B}\| \cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\vec{T}^* = \vec{T}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha \quad \wedge \quad \vec{B}^* = \vec{T}\sin\alpha + \vec{B}\cos\alpha$$

$$\frac{d\vec{T}^*}{ds} = \varkappa\vec{N}\cos\alpha + \vec{T}\frac{d(\cos\alpha)}{ds} - \tau\vec{N}\sin\alpha + \vec{B}\frac{d\sin\alpha}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \varkappa\vec{N} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\varkappa} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}$$

$$N^* = \frac{\vec{T}^{*\prime}}{\|\vec{T}^{*\prime}\|} \Rightarrow T^{*\prime} = \frac{dT^*}{ds} \,//\, N^* \,//\, N$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{T}^*}{ds} \,//\, \vec{N} \Rightarrow \frac{d\vec{T}^*}{ds} \perp \vec{T} \quad \wedge \quad \frac{d\vec{T}^*}{ds} \perp \vec{B}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\vec{T}^*}{ds}, \vec{T} \right\rangle = 0 \quad \wedge \quad \left\langle \frac{d\vec{T}^*}{ds}, \vec{B} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(\cos\alpha)}{ds} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d(\sin\alpha)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{sabit}.$$

$$\frac{dT^*}{ds} = (\varkappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\vec{N} \qquad \vec{X}^* = X + c\vec{N}$$

$$\frac{dX^*}{ds} = \frac{dX}{ds} + c(c - \varkappa\vec{T} + \tau\vec{B}) = T + c(c - \varkappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$$= (1 - c\varkappa)\vec{T} + c\tau\vec{B}$$

$$T^* = T\cos\alpha + B\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dX^*}{ds} \,//\, T^* \text{ dır.}$$

$\Rightarrow \dfrac{1 - c\varkappa}{\cos\alpha} = \dfrac{c\tau}{\sin\alpha}$ oranı vardır. $\Rightarrow \dfrac{1 - c\varkappa}{c\tau} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$

$$1 - c\varkappa = c\tau\cot\alpha \Rightarrow 1 = c\varkappa + c\tau\cot\alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $c = \lambda$ ve $\cot\alpha = \mu$ dersek

$$1 = \lambda\varkappa + \mu\tau \qquad (\lambda, \mu \text{ sabit ve } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Benzer şekilde;

$\vec{X} = \vec{X}^* + k_1\vec{N}^*$ yazılırsa, $\left\{ k_1 = \dfrac{1}{\varkappa} \right\}$

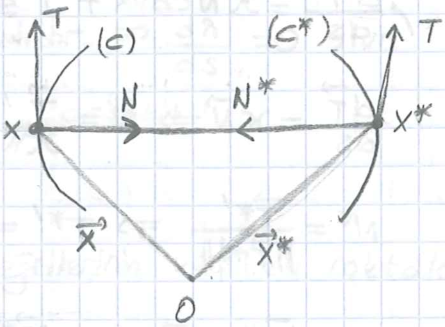
$1 = \lambda'\varkappa^* + \mu'\tau^*$ yazılabilir.

$(\lambda', \mu'$ sabit ve $\lambda', \mu' \in \mathbb{R})$

4- (c) ve (c*) çiftleri arasındaki açı sabittir.

Problem : Bir bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki oskülatör düzlemleri paralel ise bu eğriler düzlemsel eğrilerdir.

İspat// $\vec{X^*} = \vec{X} + c\vec{N}$ türev alırsak,



$$\frac{dX^*}{ds} = (1-c\varkappa)\vec{T} + c\tau\vec{B}$$

$$\vec{T^*} = \frac{dX^*}{ds^*} \Rightarrow \frac{dX^*}{ds} = \frac{dX^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds}$$

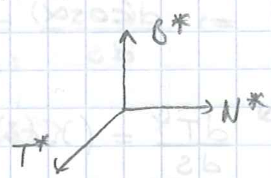
$$\Rightarrow \frac{dX^*}{ds} = \vec{T^*}\frac{ds^*}{ds}$$

$$\Rightarrow \vec{T^*} = \frac{dX^*}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} \quad \wedge \quad \vec{N^*} = \mp\vec{N} \quad \text{aslî normaller paraleldir.}$$

$$\Rightarrow B^* = T^* \wedge N^* = \left[(1-c\varkappa)\vec{T} + c\tau\vec{B}\right]\frac{ds}{ds^*} \wedge (\mp\vec{N})$$

$$\Rightarrow B^* = \mp\left[(1-c\varkappa)\vec{B} - c\tau\vec{T}\right]\frac{ds}{ds^*} \parallel B$$

$$\Rightarrow \mp c\tau\frac{ds}{ds^*} = 0 \Rightarrow \tau = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$



Bu ise c nin düzlemsel eğri olmasını gerektirir.

Dolayısıyla c* da paralel olduğundan düzlemsel eğridir.

Problemler

1- $\alpha : I \longrightarrow E^3 \quad \alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right)$ eğrisinin bir bertrand eğri çiftine dahil olup olmadığını araştırınız.

2- $\alpha(t) = (at, bt^2, ct^3)$, $abc \neq 0$, $3ac = \mp 2b^2$ ise eğrinin bir eğilim çizgisi olduğunu ispat edin.

3- Bir α eğrisinin aslî normali, diğer bir β eğrisinin binormal doğrultusu ise α eğrisinin $\varkappa$ eğrilik, τ burulması arasında $\varkappa^2 + \tau^2 = \tau\varkappa$ bağıntısının varlığını gösterin.

4- Yay parametresi s olan bir α eğrisinin, komşu iki noktasındaki binormalleri arasındaki en kısa d uzaklığının $d = \frac{\tau s}{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}$ olduğunu gösterin.

Çözümler

2 - $H=\frac{\tau}{\varkappa}=$ sabit olmalıdır. $\alpha'(t)=(a,2bt,3ct^2)$

$\alpha''(t)=(0,2b,6ct)$, $\alpha'''(t)=(0,0,6c)$

$$\alpha'\wedge\alpha''=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a & 2bt & 3ct^2\\ 0 & 2b & 6ct\end{vmatrix}=\vec{e}_1(12bct^2-6bct^2)-\vec{e}_2(6act)+\vec{e}_3(2ab)$$

$$\|\alpha'\wedge\alpha''\|=2\sqrt{9b^2c^2t^4+9a^2c^2t^2+a^2b^2}$$

$$[\alpha',\alpha'',\alpha''']=\langle\alpha'\wedge\alpha'',\alpha'''\rangle=12abc$$

$$\|\alpha'\|=\sqrt{a^2+4b^2t^2+9c^2t^4}$$

$$\frac{\tau}{\varkappa}=\frac{\dfrac{\det[\alpha',\alpha'',\alpha''']}{\|\alpha'\wedge\alpha''\|^2}}{\dfrac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}}=\frac{12abc\,(a^2+4b^2t^2+9c^2t^4)^{3/2}}{2(9b^2c^2t^4+9a^2c^2t^2+a^2b^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{12abc\,(a^2\mp2(3ac)t^2+9c^2t^4)^{3/2}}{2(9b^2c^2t^4\mp3(3ac)act^2+a^2b^2)^{3/2}}$$

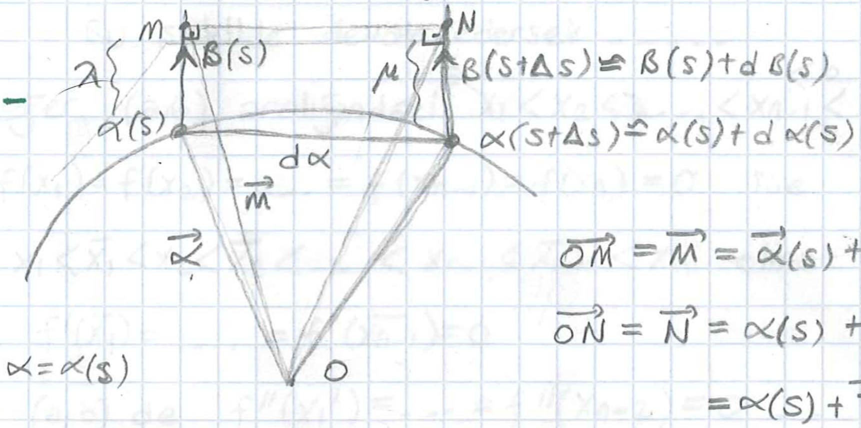
$$=\frac{12abc\,(a^2\mp6act^2+9c^2t^4)^{3/2}}{2(9b^2c^2t^4\mp3ac2b^2t^2+a^2b^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{12abc\,(a^2\mp6act^2+9c^2t^4)^{3/2}}{2[b^2(9c^2t^4\mp \quad)]^{3/2}}$$

$$=\frac{12abc}{2b^3}=\frac{12ac}{2b^2}=6\frac{ac}{b^2}=6\frac{\mp\frac{2b^2}{3}}{b^2}=\mp6\cdot\frac{2b^2}{3}\cdot\frac{1}{b^2}$$

$$=\mp4 \quad //$$

4 -



$$\overrightarrow{OM}=\vec{M}=\vec{\alpha}(s)+\lambda\vec{B}(s)$$

$$\overrightarrow{ON}=\vec{N}=\alpha(s)+d\alpha(s)+\mu(B(s)+dB(s))$$

$$=\alpha(s)+\vec{T}ds+\mu(B(s)-\tau Nds)$$

$$d=\overline{MN}=\|\overrightarrow{MN}\|,\quad D=d^2$$

$$\overrightarrow{MN}=\vec{N}-\vec{M}=\vec{T}ds-\mu\tau\vec{N}ds+(\lambda-\mu)\vec{B}(s)$$

$$d^2=D=ds^2+\mu^2\tau^2ds^2+(\lambda-\mu)^2$$

$D_\lambda = 2(\lambda-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \mu$

$D_\mu = 2\mu \tau^2 ds^2 - 2(\lambda-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \mu = 0$

$(0,0) \quad D_{\lambda\lambda} = 2 \quad D_{\lambda\mu} = -2 \quad D_{\mu\mu} = 2\tau^2 ds^2 + 2$

$\Delta = D_{\lambda\lambda} D_{\mu\mu} - D_{\lambda\mu}^2$

$= 4\tau^2 ds^2 + 2 - 4 = 4\tau^2 ds^2 > 0$ minimum verdir.

$(0,0) \Rightarrow D(0,0) = ds^2 \Rightarrow \sqrt{D} = d = ds$

Değme (Kontakt) Teorisi :

$y=f(x)$ fonksiyonunu düşünelim.

$f: A \longrightarrow B$
$x \longrightarrow y=f(x)$ fonksiyonu bu şekilde verilsin.

Bu fonksiyonun tanım kümesindeki $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında $f(x_1)=f(x_2)=\dots=f(x_n)=0$ olsun.

Rolle Teoremine göre : $f(x_1)=f(x_2)=0 \Rightarrow \exists \bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ için $f'(\bar{x}_1)=0$ olur.

$f(x_2)=f(x_3)=0 \Rightarrow \exists \bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ için $f'(\bar{x}_2)=0$ ....

.... bu şekilde devam edersek ; sonuç olarak,

$f(x_{n-1})=f(x_n)=0 \Rightarrow \exists \bar{x}_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$ için $f'(\bar{x}_{n-1})=0$ dır.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$ noktalarında , $f'(\bar{x}_1)=f'(\bar{x}_2)=\dots=f'(\bar{x}_{n-1})=0$

Rolle Teoreminden : $f'(\bar{x}_1)=f'(\bar{x}_2)=0 \Rightarrow \exists x_1' \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ için $f''(x_1')=0$ olur. Benzer şekilde tümevarım metoduyla,

$f'(\bar{x}_2)=f'(\bar{x}_3)=0 \Rightarrow \exists x_2' \in (\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ için $f''(x_2')=0$ ....

.... bu şekilde devam edersek ; sonuç olarak ,

$f'(\bar{x}_{n-2})=f'(\bar{x}_{n-1})=0 \Rightarrow \exists x_{n-2}' \in (\bar{x}_{n-2}, \bar{x}_{n-1})$ için $f''(x_{n-2}')=0$ dır.

Bu şekilde devam edersek .....

eğer (a,b) aralığındaki $a< x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$ noktalarında

1°) $f(x_1)=f(x_2)=\dots=f(x_{n-1})=f(x_n)=0$ ise

$x_1 < \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2 < \dots < x_{n-1} < \bar{x}_{n-1} < x_n$ olmak üzere (a,b) de

2°) $f'(\bar{x}_1)=\dots=f'(\bar{x}_{n-1})=0$

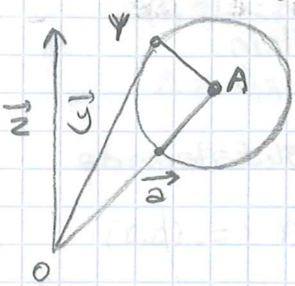
3°) (a,b) de $f''(x_1')=\dots=f''(x_{n-2})=0$ ....

4°) (a,b) de $\bar{x} \in (a,b)$ için $f^{n-1}(\bar{x})=0$ olur.

$x_1, x_2, \dots, x_n \longrightarrow x$ olsun.

1°) $f(x)=0$, 2°) $f'(x)=0$, 3°) $f''(x)=0$, ... 4°) $f^{(n-1)}(x)=0$ olur.

Tanım: $\vec{\alpha} : I \longrightarrow E^3$ eğrisi ile $\vec{a}$ merkezli r yarıçaplı bir küre veriliyor.
$\qquad s \longrightarrow \vec{\alpha}(s)$



$\vec{OY} = \vec{OA} + \vec{AY}$

$\vec{AY} = \vec{OY} - \vec{OA} \Rightarrow \vec{AY} = \vec{y} - \vec{a}$

$\Rightarrow \|\vec{AY}\| = r \Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\| = r$ küre denklemi.

$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\|^2 = r^2 \Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\|^2 - r^2 = 0$

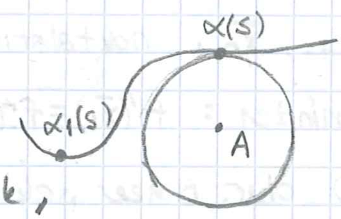
$S = \{\vec{y} \mid \|\vec{y} - \vec{a}\|^2 - r^2 = 0\}$

$f = \|\vec{y} - \vec{a}\|^2 - r^2$ olsun.

$\vec{y} = \vec{z} \Rightarrow f = \|z - a\|^2 - r^2 \neq 0$ (genel olarak)

fakat $\vec{y}$ küre üzerinde ise

$f = \|y - a\|^2 - r^2 = 0$ olur.



Farzedelim ki, $\vec{y} = \vec{\alpha}(s)$ olsun.

$f(s) = \|\alpha(s) - \vec{a}\|^2 - r^2$ dersek,

Eğer $\alpha(s)$ küre üzerinde ise $f(s) = 0$

$\alpha_1(s)$ " " değilse $f(s_1) \neq 0$ olur. (küre denk. sağlamaz.)

Eğer, $\alpha(s)$ noktası küre denkleminde yerine yazıldığında

$f(s) = 0$, $f'(s) = 0$, $f''(s) = 0, \ldots, f^{(n)}(s) = 0$ fakat,

$f^{(n+1)}(s) \neq 0$ ise küre ile eğri n. mertebeden kesişirler

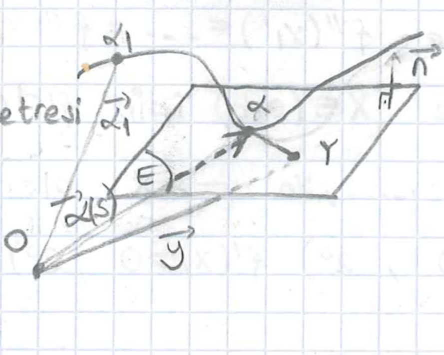
($\alpha(s)$ noktası küre ile eğrinin n. mertebeden değme noktasıdır,

(= kontakt noktasıdır) denir.

Soru // Bir eğri ile 2. mertebeden değmeye (kontakta) sahip olan düzlemi bulun.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$, s yay parametresi
$\quad s \longrightarrow \alpha(s)$

eğrisi ve E düzlemi,



α düzlemde bir nokta (eğrinin düzlemi kestiği nokta) :

$\vec{\alpha Y} \perp \vec{n} \Rightarrow \langle \vec{\alpha Y}, \vec{n} \rangle = 0$

$\vec{\alpha Y} = \vec{y} - \vec{\alpha} \Rightarrow \langle \vec{y} - \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle = 0$, α düzlemde ise

α düzlemde değil ise $\langle \vec{y} - \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle \neq 0$ olur.

Sonuç : Eğer $f(s) = \langle \vec{y} - \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle$ alırsak

$$f(s) = \begin{cases} = 0, & \alpha \text{ düzlemde ise} \\ \neq 0, & \alpha \text{ düzlemde değilse} \end{cases}$$

$f(s) = 0$, $f'(s) = 0$, $f''(s) = 0$ olsun.

1°) $f(s) = 0 \Rightarrow \langle \vec{y} - \vec{\alpha}(s), \vec{n} \rangle = 0$

2°) $f'(s) = 0 \Rightarrow \langle -\vec{T}, \vec{n} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{n} \rangle = 0$

$\left(\frac{d}{ds} \langle y - \alpha(s), n \rangle = 0 \right.$

$\Rightarrow \langle -\vec{T}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{y} - \vec{\alpha}, 0 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle -\vec{T}, \vec{n} \rangle = 0$

$f'(s) = -\langle \vec{T}, \vec{n} \rangle$

$f''(s) = 0 \Rightarrow f''(s) = -\langle \kappa \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0$

$\Rightarrow \kappa \langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0 \longrightarrow \kappa \neq 0$ (aksi halde eğri doğru olur.)

$\longrightarrow \langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0$

$\vec{n} = \alpha \vec{T} + \beta \vec{N} + \gamma \vec{B}$ şeklinde yazılırsa,

$\Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{T}, \alpha \vec{T} + \beta \vec{N} + \gamma \vec{B} \rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\langle \vec{N}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Eğer düzlemin $\vec{n}$-normalini birim vektör alırsak : (değilse, $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \vec{e}$ olarak alabiliriz.)

$\vec{n}$ birim olduğundan $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \mp 1$

$\Rightarrow n = \mp \vec{B} \Rightarrow f(s) = 0 \Rightarrow \langle \vec{y} - \vec{\alpha}(s), \mp \vec{B} \rangle = 0$

$\Rightarrow \mp \langle \vec{y} - \vec{\alpha}(s), \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{y} - \vec{\alpha}(s), \vec{B} \rangle = 0$

Sonuç : Bir eğri ile her noktada 2. mertebeden kontağa (değmeye) (veya kesişmeye) sahip olan düzlem, oskülatör düzlemdir.

Ödev : E^n de bir α eğrisi ile (n-1). mertebeden kontakt değmeye sahip olan hiper düzlemi belirtsin. (hiper düzlem : n boyutlu uzaydaki düzlemdir.)

$\{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n}\}$ frenet vektörleri.

$f(s) = \langle \vec{y} - \alpha(s), \vec{n} \rangle$ türevleri sıfıra eşitleyip,

$\vec{n} = \alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2} + \ldots + \alpha_n \vec{V_n}$ şeklinde sonuca gidilir.

Oskülatör Küre ve Küresel Eğriler

9.3.96 / C.tesi

Bir $x(s)$ eğrisine 4. noktadan değen küreleri araştıralım.

Bunun için $f(s) = \|\vec{X}(s) - \vec{a}\| - r^2$,

$f(s) = 0$, $f'(s) = 0$, $f''(s) = 0$, $f'''(s) = 0$ olacaktır.

$$\frac{1}{2} f'''(s) = [\kappa \langle \vec{N}, \vec{X} - \vec{a} \rangle + 1]' = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\kappa} \langle \vec{N}, \vec{X} - \vec{a} \rangle + \kappa \langle \dot{\vec{N}}, \vec{X} - \vec{a} \rangle + \kappa \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{T} \rangle}_{0} -$$

$$\Rightarrow -\dot{\kappa}\rho + \kappa \langle -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}, \vec{X} - \vec{a} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\dot{\kappa}\rho + \kappa\tau \langle \vec{B}, \vec{X} - \vec{a} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \dot{\rho} = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}$$

olduğundan $\tau = \sigma$ burulma yarıçapı denir. $r = -\dot{\rho}\sigma$ bulunur.

Kürenin Merkezi :

$\boxed{\vec{z} = \vec{X} + \rho \vec{N} + \dot{\rho}\sigma \vec{B}}$ dir.

Tanım : Bu küreye, eğrinin oskülatör küresi denir.

Sonuç : Bir eğriye, bir noktada değen bir tek nokta vardır.

$\vec{z} = \vec{X} + \rho \vec{N} + \dot{\rho}\sigma \vec{B}$ nin türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{z}}{ds} = \vec{T} + \dot{\rho} \vec{N} + \rho(-\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}) + \ddot{\rho}\sigma \vec{B} + \dot{\rho}\dot{\sigma} \vec{B} - \dot{\rho}\sigma\tau \vec{N} \quad (\rho, s \text{ ye bağlı})$$

$$= [\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}] \vec{B} \quad \text{bulunur.}$$

Sonuç: Oskülatör kürenin merkezleri $\vec{B}$ doğmesinde bulunurlar. (hareket ederler.)

$\vec{z}$ = sabit ise $\frac{d\vec{z}}{ds} = 0$ dır.

$\Rightarrow [\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}] = 0$ olmasıdır. Tersi de doğrudur.

Oskülatör kürenin yarıçapı

$R_1^2 = \|z - x\|^2 = \rho^2 + \dot{\rho}^2\sigma^2$ olduğundan

R_1 = sabit olması için $\Leftrightarrow$ $\frac{dR_1}{ds} = 0$ olmasıdır. Yani

$\frac{dR_1^2}{ds} = 0 = 2\rho\dot{\rho} + 2(\dot{\rho}\sigma)(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}$ olmasıdır.

$2\dot{\rho}\sigma[\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}] = 0$, $\dot{\sigma} \neq 0, \sigma \neq 0$ olduğundan

$\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot} = 0$ olmalıdır.

Sonuç: Oskülatör kürenin merkezi sabit ise yarıçapı da sabit kalır.

Sonuç: Eğrimiz sabit bir küre üzerinde çizilmişse (oskülatör küre) $\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma) = 0$ olur. Tersine olarak bir eğrinin her noktasındaki oskülatör küre $\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot} = 0$ ise oskülatör küre ile her noktası kesişir.

Sonuç: Bir $\vec{x}(s)$ eğrisinin küresel olması için $\Leftrightarrow$ $\rho\tau + (\dot{\rho}\sigma)^{\cdot} = 0$ bağıntısının olmasıdır.

Eğrilik Merkezi ve Eğrilik Çemberi

$\vec{x} = \vec{x}(s)$ eğrisi ile bir noktada 3. mertebeden kesişen bir kürenin denklemini araştıralım.

Merkezi a, yarıçapı r olan küre denklemi ; y değişken olmak üzere, $\|\vec{y} - \vec{a}\| = r$ veya $\langle \vec{y} - \vec{a}, \vec{y} - \vec{a} \rangle = r^2$ idi.

Burada y yerine $x(s)$ yazalım.

$\langle \vec{x}(s)+\vec{a}, \vec{x}(s)-\vec{a} \rangle = r^2 \Rightarrow \langle \vec{x}(s)-\vec{a}, \vec{x}(s)-\vec{a} \rangle - r^2 = 0$

$f(s) = \langle \vec{x}(s)-\vec{a}, \vec{x}(s)-\vec{a} \rangle - r^2$ olur.

Eğer eğri ve bir küre s noktasında 3. mertebeden kesişiyorsa, $f(s)=f'(s)=f''(s)=0$ olmalıdır.

$f(s)=0 \Rightarrow \langle \vec{x}(s)-\vec{a}, \vec{x}(s)-\vec{a} \rangle - r^2 = 0$ olmalıdır.

$f'(s)=0 \Rightarrow 2\langle \vec{T}(s), \vec{x}(s)-\vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{T}, \vec{x}-\vec{a} \rangle = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a,b \rangle' = \langle a',b \rangle + \langle a,b' \rangle \\ \langle x', x-a \rangle + \langle x-a, x' \rangle \\ \langle T, x-a \rangle + \langle x-a, T \rangle \\ 2\langle T, x-a \rangle \end{array} \right\}$$

$f'(s) = \langle \vec{T}, \vec{x}-\vec{a} \rangle$

$f''(s) = \langle \vec{T}', \vec{x}-\vec{a} \rangle + \langle \vec{T}, \vec{x}' \rangle$

$= 2[\langle \kappa\vec{N}, \vec{x}-\vec{a} \rangle + \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle]$

$= 2[\kappa\langle \vec{N}, \vec{x}-\vec{a} \rangle + 1]$

$\Rightarrow f''(s) = \kappa\langle \vec{N}, \vec{x}-\vec{a} \rangle + 1 = 0$

Küre merkezinden, üzerindeki noktaya giden $\vec{x}-\vec{a}$ vektörü

$\vec{x}-\vec{a} = \alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B}$ şeklinde yazılırsa

$\langle \vec{x}-\vec{a}, \vec{x}-\vec{a} \rangle^2 - r^2 = 0$

$\langle \alpha\vec{T}+\beta\vec{N}+\gamma\vec{B}, \alpha\vec{T}+\beta\vec{N}+\gamma\vec{B} \rangle^2 - r^2 = 0$

$\langle \alpha\vec{T}, \alpha\vec{T} \rangle + \langle \beta\vec{N}, \beta\vec{N} \rangle + \langle \gamma\vec{B}, \gamma\vec{B} \rangle - r^2 = 0$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0$

$\alpha = \langle \vec{T}, \vec{x}-\vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ dır.

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0 \Rightarrow \beta^2+\gamma^2-r^2=0$ olur.

$\beta = \langle \vec{N}, \vec{x}-\vec{a} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = \rho \Rightarrow \beta = \rho$

$\boxed{\rho^2+\gamma^2-r^2=0}$ şekline dönüşür.

$r^2 = \rho^2 + \gamma^2$ olur.

Böylece kürenin $\vec{x} - \vec{a}$ vektörü ;

$\vec{x} - \vec{a} = -\rho\vec{N} + \gamma\vec{B}$ elde edilir. O halde $\vec{x}(s)$

eğrisine 3. mertebeden değen kürenin $\vec{a}$ merkezi ;

$\boxed{\vec{a} = \vec{x}(s) + \rho\vec{N} - \gamma\vec{B}}$ bulunur.

Sonuç : $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ için bir küre elde edileceğinden, $\vec{x} = \vec{x}(s)$ eğrisi ile 3. mertebeden kesişen sonsuz tane küre vardır.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \sigma & \text{sabit} \end{array}\right.$$ (her değişmede merkez değişir ve sonsuz küre elde edilir.)

Sonuç : $\vec{a} = \vec{x}(s) + \rho\vec{N} - \gamma\vec{B}$ ifadesinde, $\vec{x}(s)$ noktasından geçen bir doğrunun denklemidir. O halde bir eğriyle 3. mertebeden kesişen kürelerin merkezi, bir doğru üzerinde bulunur.

Tanım : Bu doğruya eğrilik ekseni denir.

Soru :// Bir eğri ile 3. mertebeden ortak noktaya sahip olan ve merkezi oskülatör düzlemde olan küreyi araştıralım.

- Kürenin merkezi, oskülatör düzlemde olacağından,

$\vec{a_0} = \vec{x}(s) + \rho\vec{N} - \gamma\vec{B}$ de $\gamma = 0$ olur.

Buna göre kürenin merkezi ;

$\vec{a_0} = \vec{x}(s) + \rho\vec{N}$ olur. Yarıçapı ise

$r_0 = \rho = \dfrac{1}{\kappa}$ bulunur.

Tanım : yer vektörü $\vec{a_0} = \vec{x}(s) + \rho\vec{N}$ olan a_0 noktasına $\vec{x}(s)$ eğrisinin eğrilik merkezi denir.

Teorem : Bir eğri ile herhangi bir noktada 3. mertebeden kesişen küreler oskülatör düzlem ile bir çember boyunca kesişir.

Tanım: Bu çembere eğrilik çemberi denir.

İspat// $a_0 = X(s) + \rho N - \gamma B$ idi. Bu kürenin merkezinin oskülatör düzlemdeki izdüşümü $\gamma = 0$ için, $\vec{a}_0 = \vec{X}(s) + \rho \vec{N}$ idi.

Yarıçapı da $r_0 = \rho = \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \|\vec{X}(s) - \vec{a}\| = r_0$ olur.

Oskülatör Küre ve Küresel Eğri

Bir $x(s)$ eğrisine 4. mertebeden değen küreleri araştıralım. $f(s) = \langle \vec{x}(s) - \vec{a}, \vec{x}(s) - \vec{a} \rangle$ idi. (2. mertebeden değmeyi hesaplarken bulmuştuk.) $f'(s)$ ve $f''(s)$ yi bulmuştuk.

$$f'''(s) = \dot{\kappa} \langle \vec{N}, \vec{X} - \vec{a} \rangle + \kappa \langle -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}, \vec{X} - \vec{a} \rangle + \underset{\text{sabit}}{0} = 0$$

$$= \dot{\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right) + \kappa\tau \langle \vec{B}, \vec{X} - \vec{a} \rangle = 0$$

$$= \dot{\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right) - \kappa\tau\gamma = 0 \quad \Rightarrow \gamma = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau}$$

$$\frac{1}{\tau} = \sigma, \quad \frac{1}{\kappa} = \rho, \quad \rho' = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}$$

$$\gamma = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\frac{1}{\tau} = \dot{\rho}\sigma \quad \text{bulunur.}$$

Eğer $\tau \neq 0$ ise eğriye $\vec{x}(s)$ noktasında 4. mertebeden değen birtek küre vardır. Ve bu kürenin merkezi,

$$\vec{a}_1 = \vec{X} + \rho \vec{N} + \rho' \sigma \vec{B} \quad \text{olur.}$$

Tanım: Bu küreye oskülatör küre denir.

Bu kürenin yarıçapı, $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ den,

$$\boxed{r_1^2 = \rho^2 + \rho'^2 \sigma^2} \quad \text{olur.}$$

Tanım: $\sigma = \frac{1}{\tau}$ ya, burulma yarıçapı denir.

$\vec{X} = \vec{x}(s)$ eğrisi çizilirken, oskülatör kürenin merkezi

$$\vec{a} = \vec{X} + \rho \vec{N} + \rho' \sigma \vec{B}$$

eğrisini çizer. Bu eğrinin çizilme hızı,

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \vec{T} + \rho'\vec{N} + \rho(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + (\rho'\sigma)'\vec{B} - \rho'\sigma\tau\vec{N}$$
$$= \vec{T} + \rho'\vec{N} - \vec{T} + \rho\tau\vec{B} + (\rho'\sigma)'\vec{B} - \rho'\vec{N}$$
$$= [\rho\tau + (\rho'\sigma)']\vec{B} \quad \text{olur.}$$

yani, küre merkezi $\vec{B}$ yönünde hareket eder.

Sonuç: Oskülatör kürenin merkezinin sabit olması için $\Leftrightarrow$ $\frac{d\vec{a}}{ds} = 0$ yani, $\rho\tau + (\rho'\sigma)' = 0$ dan elde edilir.

Bir kürenin yarıçapının sabit olması için,

$\frac{dr_1^2}{ds^2} = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow 2\rho\rho' + 2\rho'\rho''\sigma^2 + 2\rho'^2\sigma'\sigma = 0$$
$$\Rightarrow 2\rho'\sigma(\rho\tau + \sigma\rho'' + \sigma'\rho') = 0$$
$$\Rightarrow 2\rho'\sigma(\rho\tau + (\rho'\sigma)') = 0 \text{ veya}$$

$\boxed{\rho\tau + (\rho'\sigma)' = 0}$ bulunur. ($\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$ için)

Sonuç: Oskülatör kürenin merkezi sabit ise yarıçapı da sabittir. O halde $\rho\tau + (\rho'\sigma)' = 0$ şartı varsa tüm oskülatör küreler aynı merkez ve yarıçaplı küreyle çakışır.

Sonuç: yani, $\vec{X}(s)$ eğrisi için, $\rho\tau + (\rho'\sigma)' = 0$ şartı, eğrinin küresel eğri olduğunu gösterir.

16.3.96 / C.tesi.

Manifoldlar Üzerinde Eğriler, Tanjant Vektörler, Vektör Alanları

- Topolojik Manifold: M bir topolojik uzay (M, τ)

  " 1°) M bir Hausdorff uzayıdır.

  2°) Sayılabilir çoklukta (M'nin) açık kümelerden oluşan açık örtüsü vardır.

  3°) Bu açık örtüye ait herbir küme E^n'e veya bir alt kümesine homeomorftur. //

önermeleri doğru ise M'ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

$\psi : U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} V_\alpha \qquad U_\alpha \subseteq E^n, \ V_\alpha \subseteq M$ olsun.

- (ψ, U_α) = harita (koordinat komşuluğu)
- $(\psi_\alpha, \cup U_\alpha)$ = atlas (" " sistemi)
- Eğer $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longrightarrow f(p)$ tüm mertebelerden kısmi türevleri var ve sürekli ise f ye diferansiyellenebilirdir. ve

f, C^∞ sınıfındandır denir. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ yazılır.

- $C^k(M,\mathbb{R}) = \{ f \mid f : M \xrightarrow{C^k \text{ sınıfı}} \mathbb{R} \}$ f, k. mertebeden bir dif. bilir fonksiyon = f, C^k sınıfından = $f \in C^k(M, \mathbb{R})$
- Diffeomorfizm = Homeomorfizmdeki süreklilik, diffeomorfizmde diferansiyellenebilme (C^k sınıfından olma)

$\psi : M \longrightarrow N$ tersi var ve diferansiyellenebilirse ψ ye diffeomorfizm denir.

Tanım : M bir diferansiyellenebilir manifold, $I \subseteq \mathbb{R}$ olsun. (I bir açık aralık) Bir $\alpha : I \longrightarrow M$ fonksiyonu verilsin.

Eğer $P \in M$ ise $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ yazalım. $(i = 1, 2, \dots, n)$

$U_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$
$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \longrightarrow U_i(P) = p_i$ olsun.

$U_i(P) = U_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_i$

$i = 1, \quad U_1(P) = U_1(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1$, 1. koordinat fonksiyonu

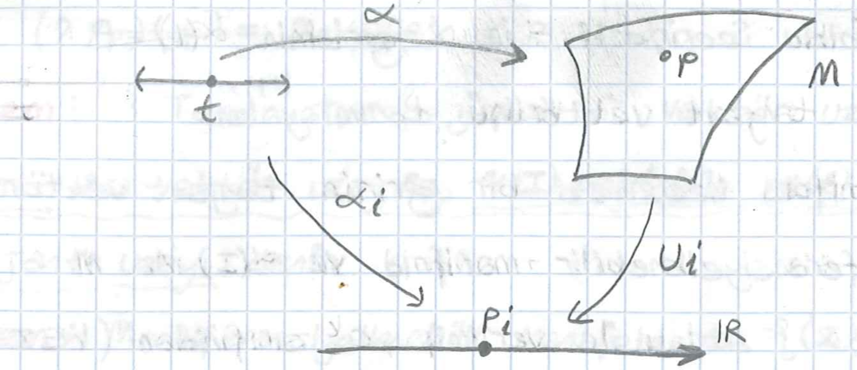
$i = 2, \quad U_2(P) = U_2(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_2$, 2. " "

– – – – –

$U_i(P) = p_i$, i. koordinat fonksiyonu.

M diferansiyellenebilir manifold olduğundan, M üzerindeki $U_1, U_2, \dots, U_n$ koordinat fonksiyonları da diferansiyellenebilirdir.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & M \arrow[dl, "U_i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \qquad \alpha_i = U_i \circ \alpha$$



$\alpha(t)=p$ olsun. $U_i(p)=p_i$

Eğer $\alpha(t)=p\in M$ noktasının $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$, lokal koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan

$$\alpha_i=U_i\circ\alpha : I\longrightarrow IR \qquad 1\leq i\leq n$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler, $\alpha: I\longrightarrow M$ fonksiyonu C^k sınıfındandır denir.

Tanım: (Bir Manifold Üzerinde C^k sınıfından Eğri):

M, n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha: I\longrightarrow M$ ye C^k sınıfından bir fonksiyon olsun. $\alpha(I)\subset M$ alt kümesine $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilmiş, C^k sınıfından bir eğri denir.

E^n de $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ — mınoT

$\chi(E^n)$ in standart bazı olmak üzere E^n de $\alpha: I\longrightarrow E^n$, $t\longrightarrow\alpha(t)$ eğrisi, $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilsin. $P\in E^n$ ve $f: E^n\xrightarrow{\text{dif. bilir}} IR$

$$(e_1)_p=\langle(e_1)_p,\nabla f|_p\rangle=\left\langle(1,0,0,\ldots,0)|_p,\ \frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p \Rightarrow (e_1)_p(f)=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p(f)$$

$$\Rightarrow (e_1)_p=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \qquad 1\leq i\leq n$$

$$\Rightarrow e_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\ e_i=\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ dir.}$$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ olmak üzere E^n deki α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü, $\frac{d\alpha}{dt}=\alpha'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t e_i(p)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

Bir M manifoldu üzerindeki bir α eğrisinin $\alpha(t)=P$ noktasındaki tanjant vektörünü tanımlayalım.

Tanım: (Bir manifold üzerindeki bir eğrinin tanjant vektörü):

M bir diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$'da M üzerinde $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilmiş, C^k sınıfından $(k\in\mathbb{Z}^+)$ bir eğri olsun. $\alpha(t)=P\in M$ olmak üzere,

$$X_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow X_P(f) = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_t$$

şeklinde tanımlı X_P fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)=P$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

E^n de $\quad X_P[f]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P \cdot v_i = \langle X_P, \nabla f|_P\rangle \in \mathbb{R}$

$X_P=(v_1,v_2,\dots,v_n)_P \quad f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$\Rightarrow \underset{\downarrow}{X_P}(f)=\langle X_P,\nabla f|_P\rangle\in\mathbb{R}, \quad f\in C^\infty(E^n,\mathbb{R})$

dönüşüm olarak alınabilir

$X_P : C^\infty(E^n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (kovaryant türev)

$f \longrightarrow X_P[f]$ idi.

Tanım: (M manifoldu üzerindeki bir eğrinin tanjant uzayı):

Bir M manifoldu üzerindeki, bir $\alpha(I)$ eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin kümesi $T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))}$ ($\alpha(t)$ → eğrinin bir noktası; $\alpha(I)$ → eğrinin kümesi) olsun. Bu kümede toplama işlemi ve skalerle çarpma işlemini tanımlarsak;

$$+ : T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))} \times T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))} \longrightarrow T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))}$$
$$(X_P, Y_P) \longrightarrow X_P+Y_P$$

işlemi $P=\alpha(t)$ ve $\forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$(X_P+Y_P)(f) = X_P(f)+Y_P(f)$ işlemi, toplama işlemidir.

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))} \longrightarrow T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))}$$
$$(\lambda, X_P) \longrightarrow \lambda . X_P$$

işlemi $P=\alpha(t)$ ve $\forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f) \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem: $\{ T_{\alpha(I)}^{(\alpha(t))}, +, \cdot \}$ yapısı bir vektör uzayıdır.

Tanım: Bu vektör uzayına, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı denir.

Teorem: M, diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$, M üzerinde C^k sınıfından bir eğri olsun.

i° $\forall X_p \in T_{\alpha(I)}^{(p)}$ için, $X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineerdir. ($\mathbb{R}$-lineerlik)

ii° $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için $X_p(f.g) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$ dir.

İspat// i- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$X_p(af+bg) = a.X_p(f) + b.X_p(g)$ olduğunu göstermeliyiz.

$X_p(f) = \dfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_t$ idi.

$$X_p(af+bg) = \frac{d[(af+bg)\circ\alpha]}{dt}\Big|_t = \frac{d[(af+bg)(\alpha(t))]}{dt}\Big|_t$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[(af)(\alpha(t)) + (bg)(\alpha(t))\Big]$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[af(\alpha(t)) + bg(\alpha(t))\Big]$$

$$= a\,\frac{d(f(\alpha(t)))}{dt} + b\,\frac{d(g(\alpha(t)))}{dt}$$

$$= a\frac{d}{dt}[(f\circ\alpha)(t)] + b\frac{d}{dt}[(g\circ\alpha)(t)]$$

$$= a.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_t + b\,\frac{d(g\circ\alpha)}{dt}\Big|_t$$

$\Rightarrow X_p(af+bg) = a\,X_p(f) + b\,X_p(g)$

o halde bu fonksiyon $\mathbb{R}$-lineerdir. //

ii- $X_p(f.g) = \dfrac{d[(fg)\circ\alpha]}{dt}\Big|_t$

$$= \frac{d}{dt}\big[(fg)(\alpha(t))\big] = \frac{d}{dt}\big[f(\alpha(t)).g(\alpha(t))\big]$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt}\left[f(\alpha(t))\right] \right\} g(\alpha(t)) + f(\alpha(t)) \cdot \left\{ \frac{d}{dt}\left[g(\alpha(t))\right] \right\}$$

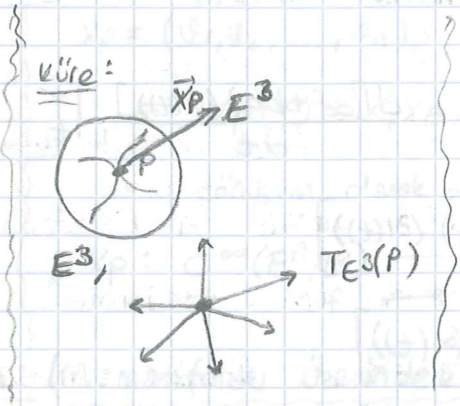
$$= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t) \cdot (g\circ\alpha)(t) + (f\circ\alpha)(t)\,\frac{d}{dt}(g\circ\alpha)(t)$$

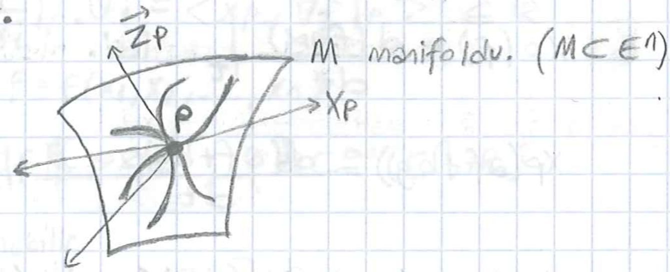
$$= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_t \cdot g(P) + f(P)\cdot\frac{d}{dt}(g\circ\alpha)\Big|_t$$

$X_P(fg) = X_P(f)\,g(P) + f(P)\,X_P(g)$ (Leibniz kuralının benzeri)

Tanım: (M manifoldunun tanjant vektörü):

M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $P \in M$ olsun. $X_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu M üzerindeki en az bir eğrinin tanjant vektörü ise X_P'ye, M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.





Tanım: (M'nin tanjant uzayı):

M manifoldu üzerinde bir nokta $P \in M$ olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin kümesi $T_M(P)$ olsun. ($T_P(M)$)

$T_M(P)$ üzerinde;

$$+ : T_M(P) \times T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

$(X_P, Y_P) \longrightarrow X_P + Y_P$ işlemi, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$(X_P + Y_P)(f) = X_P(f) + Y_P(f)$ olarak ve

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

$(\lambda, X_P) \longrightarrow \lambda X_P$ işlemi, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$(\lambda X_P)(f) = \lambda . X_P(f)$ tanımlanıyor.

$(T_M(P), +, \cdot)$ bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M nin P noktasındaki tanjant uzayı denir.

Teorem: M bir diferansiyellenebilir manifold, $P \in M$ ve P noktasındaki M nin tanjant uzayı $T_M(P)$ olsun.

$\forall X_p \in T_M(P)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

i- $X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineerdir.

ii- $X_p(fg) = X_p(f)g(P) + f(P)X_p(g)$ dir.

İspatın aynısı yapıldığı için, ispat yapılmayacaktır.

E^n in tanjant uzayı $T_{E^n}(P)$ ve M nin tanjant uzayı $T_M(P)$ dir. 23.3.96/C.tesi

M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $P \in M$ olsun. M nin P noktasındaki bir lokal koordinat sistemi, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ olsun. ($U \subseteq M$ (U açık küme) ve ψ, homeomorfizmdir.) $\forall P \in M \to P$ nin U komşuluğu varsa (ψ, U) diffeomorfizm olur.) $e_i|_p = \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümü, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(P)$ olarak tanımlanıyor.

Bu taktirde, $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_p\right\}$ sistemi tanımlanmış olur. Bu sistem $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ in, duali olan sistemdir.

Tanım: $\{e_1^*|_p, e_2^*|_p, \ldots, e_n^*|_p\}$ bazına $\{e_1|_p, e_2|_p, \ldots, e_n|_p\}$ bazının dual bazı denir.

$i=1$ için $\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p$, $\quad f = u_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p(u_1) = \frac{\partial u_1}{\partial u_1}\Big|_p = 1$

$f = u_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p(u_2) = \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\Big|_p = 0$

$\vdots$

$f = u_n \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p(u_n) = \frac{\partial u_n}{\partial u_1}\Big|_p = 0$

$i = 1, 2, \ldots, n \quad \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_p(u_j) = \delta_{ij}$

Sonuç: $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_p\right\}$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ in dualidir.

Ayrica $U_i(\alpha(t)) = t + U_i(\alpha(t_0))$ $i=j$ için

$U_j(\alpha(t)) = U_j(\alpha(t_0))$ $i \neq j$ olarak verilsin. $\alpha(t_0) = P$ olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow M$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = [U_1 \circ \alpha(t_0), \ldots, U_i \circ \alpha(t), \ldots, U_n \circ \alpha(t_0)]$$

olarak alınırsa,

$$X_P(f) = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial U_j}\Big|_P \frac{dU_j}{dt}\Big|_{t_0}$$

$$\frac{dU_i(\alpha(t))}{dt} = 1, \quad i=j \text{ ise}, \quad \frac{dU_j(\alpha(t))}{dt} = 0 \quad i \neq j \text{ ise.}$$

$$\Rightarrow X_P(f) = \frac{\partial f}{\partial U_j}\Big|_P \Rightarrow \boxed{X_P = \frac{\partial}{\partial U_j}\Big|_P}$$

Sonuç: $\frac{\partial}{\partial U_j}\Big|_P$, M nin P noktasındaki bir tanjant vektördür.

$\left\{\frac{\partial}{\partial U_1}\Big|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial U_n}\Big|_P\right\}$ de n-tane tanjant vektördür.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial U_i}\Big|_P \in T_P(M) \text{ dir.}$$

Teorem: M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.
$P \in M$ noktasının bir komşuluğundaki $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ lokal koordinat sisteminin duali olan $\phi = \left\{\frac{\partial}{\partial U_1}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial U_2}\Big|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial U_n}\Big|_P\right\}$ $T_M(P)$ nin bir bazıdır.

İspat// i- Lineer bağımsızlık : (Germe işlemini göstermeye gerek yok.)

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lambda_1 \frac{\partial}{\partial U_1}\Big|_P + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial U_2}\Big|_P + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial U_n}\Big|_P = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial U_i}\Big|_P = 0 \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow U_j \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial U_i}\Big|_P\right)(U_j) = 0.(U_j)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial U_i}\Big|_P\right)(U_j) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial U_i}\Big|_P (U_j) = 0 \quad \text{(lineerlikten)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\Big|_p = 0 \quad \text{(dönüşüm tanımından)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

O halde bu küme lineer bağımsızdır.

ii- $boy\, M = boy\, T_M(P)$ olduğundan (n-tane vektör var) lineer bağımsız, $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_p\right\}$ bir bazdır. (germe.)

Tanım: (Vektör Alanı): M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$
$$P \longrightarrow X(P) = X_P \in T_M(P)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir. Bu fonksiyonların kümesini $\chi(M)$ (ki) ile gösterebiliriz.

Tanım: a) Toplama : $+ : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$

$$(X, Y) \longrightarrow X + Y \quad \text{işlemi;}$$

$\forall P \in M$ için, $(X+Y)(P) = X_P + Y_P$ olarak tanımlanıyor.

b) Skalerle Çarpma : $\bullet : \mathbb{R} \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$

$$(\lambda, X) \longrightarrow \lambda . X \quad \text{işlemi;}$$

$\forall P \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için, $(\lambda X)(P) = \lambda . X_P$ olarak tanımlanıyor.

Sonuç: M diferansiyellenebilir manifoldu üzerindeki, $\chi(M)$ vektör alanlarının kümesi için, $\{\chi(M), +, (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ\}$ bir vektör uzayıdır.

Bu vektör uzayına, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir.

$X \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $P \in M$ olsun.

$$X_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow X_P(f) \qquad X(P) = X_P$$

$\chi(M)$ ile $C^\infty(M,\mathbb{R})$ arasında;

$(Xf)(P) = \underbrace{X_P(f)}_{\in \mathbb{R}}$ bağıntısı vardır. //

$$\left\{\begin{array}{l} X: M \longrightarrow \bigcup_{P\in M} T_M(P) \\ f: M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad P \longrightarrow f(P) \end{array}\right. \qquad \left\{ (fX)(P) = f(P)X(P) = \underbrace{f(P)X_P}_{\in \chi(M)} \right\} //$$

Teorem: M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $\chi(M)$ de M üzerindeki vektör alanlarının uzayı olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için;

i- $X: C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$ lineerdir.

ii- $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, $X(fg) = fX(g) + X(f)g$ dir.

İspat// İspatı noktasal olarak yapalım.

i- $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, ($\forall P \in M$ için)

$X(af+bg) = aX(f) + bX(g)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}[X(af+bg)](P) &= X_P(af+bg) \\ &= aX_P(f) + bX_P(g) \\ &= [aX(f)+bX(g)](P)\end{aligned}$$

$\Rightarrow X(af+bg) = aX(f) + bX(g)$ olur. ($\mathbb{R}$-lineerlik) //

ii- $\forall P \in M$ için, $[X(fg)](P) = X_P(fg) = X_P(f)g(P) + f(P)X_P(g)$

$$= [X(f)g + fX(g)](P)$$

$\Rightarrow X(fg) = X(f)g + fX(g)$ (Leibniz kuralı) //

M bir diferansiyellenebilir manifold ve $P \in M$ olsun. $P \in M$'nin bir U açık komşuluğu da bir diferansiyellenebilir manifolddur. U'da bir lokal koordinat sistemi, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olsun. $\forall Q \in U$ için, $T_U(Q)$ nun bir bazı, $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_Q, \frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_Q, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_Q\right\}$ dır. Bu baz yardımıyla $\chi(U)$ nun bir bazı,

$\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right\}$ olarak elde edilir.

Tanım : (Lie Parantez Operatörü) :

Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde, vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[\,,\,] : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow [\,,\,](X,Y) = [X,Y]$$

işlemi $\forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, $[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$ olarak tanımlanıyor. Bu $[\,,\,]$ dönüşümüne, $\chi(M)$ üzerindeki Lie Parantez Operatörü denir.

Teorem : Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve $\chi(M)$ üzerinde, $[\,,\,]$ Lie parantez operatörü verilsin. Bu operatörün, aşağıdaki özellikleri vardır.

i - Bilineerlik (2-lineerlik) özelliği: $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $\forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için ;

$$[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$
$$[X, aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$$

ii - Antisimetri özelliği :

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

iii - Jacobi özdeşliği :

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Örnek// $\forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$[aX+bY, Z](f) = (aX+bY)(Zf) - Z[(aX+bY)f] \quad \text{(tanımdan)}$$
$$= aX(Zf) + bY(Zf) - Z[(aX)f + (bY)f]$$
$$= aX(Zf) + bY(Zf) - Z[aX(f) + bY(f)]$$
$$= aX(Zf) + bY(Zf) - aZ(X(f)) - bZ(Y(f))$$
$$= a[X(Zf) - Z(X(f))] + b[Y(Zf) - Z(Y(f))]$$
$$= a[X,Z](f) + b[Y,Z](f)$$

$$= \left(a[X,Z] + b[Y,Z]\right)(f)$$

$$\Rightarrow [aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \quad \text{olur.} //$$

Benzer şekilde;

$$[X, aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$$

olduğu gösterilir.

ii - $[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = -\left(Y(Xf) - X(Yf)\right)$
$$= -[Y,X](f)$$
$$\Rightarrow [X,Y] = -[Y,X] \quad \text{olur.} //$$

iii - $\left\{[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]\right\}(f)$

$$= [X,[Y,Z]](f) + [Y,[Z,X]](f) + [Z,[X,Y]](f)$$

$$= X([Y,Z](f)) - [Y,Z](Xf) + Y([Z,X](f)) - [Z,X](Yf) + Z([X,Y](f)) - [X,Y](Zf)$$

$$= X\{Y(Zf) - Z(Yf)\} - \{Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf))\} + Y\{Z(Xf) - X(Zf)\} - \{Z(X(Yf)) - X(Z(Yf))\} + Z\{X(Yf) - Y(Xf)\} - \{X(Y(Zf)) - Y(X(Zf))\}$$

$$= \cancel{X(Y(Zf))} - \cancel{X(Z(Yf))} - \cancel{Y(Z(Xf))} + \cancel{Z(Y(Xf))} + \cancel{Y(Z(Xf))} - \cancel{Y(X(Zf))} - \cancel{Z(X(Yf))} + \cancel{X(Z(Yf))} + \cancel{Z(X(Yf))} - \cancel{Z(Y(Xf))} - \cancel{X(Y(Zf))} + \cancel{Y(X(Zf))} = 0(f)$$

$$\Rightarrow [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \text{olur.}$$

Teorem: M, diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki $P \in M$ noktasındaki bir U açık komşuluğu verilsin. U üzerinde bir lokal koordinat sistemi, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $X, Y \in \chi(U)$ iki vektör alanı, $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\xi_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\eta_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise,

$$[X,Y] = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\right) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{olur.}$$

İspat// $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{idi.}$$

$$X(Yf) = ? \quad Y(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)(f)$$

$$Y(f) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial u_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$X(Yf) = X\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} X\left(\eta_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{X(\eta_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} + \eta_i X\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\right\} \quad \text{(Leibniz'den)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{n} \eta_i X\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial}{\partial u_k}\right)(\eta_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)$$

- $$X(Yf) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_i \xi_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_i}}$$

$Y(Xf) = ? \quad X(f) = ?$ **30.3.96 / C.tesi.**

- $$Y(Xf) = \sum_{i,k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i,k=1}^{n} \eta_k \xi_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k}$$ olur. Böylece,

- $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ 'den

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_{i,k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n}\left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\right)\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$= \left[\sum_{i,k=1}^{n}\left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}\right](f) \quad \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

$$\Rightarrow [X,Y] = \sum_{i,k=1}^{n}\left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial u_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_i} \in \chi(M) \quad //$$

Teorem : M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde, $\chi(M)$ vektör alanlarının uzayı olmak üzere, $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad \text{dir.}$$

İspat// $\forall h \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\forall P \in M$ için

$$\left([fX, gY]h\right)(P) = [fX, gY]_P\, h = (fX)_P\left((gY)(h)\right) - (gY)_P\left((fX)(h)\right)$$

$\{ X(P) = X_P$ idi. $\}$

$$= f(P)X_P[(gY)(h)] - g(P)Y_P[(fX)(h)]$$

$$= f(P)[X_P(g)Y_P(h) + g(P)X_P(Yh) -$$

$$- g(P)[Y_P(f)X(h) + f(P)Y_P(Xh)]$$

$$= f(P)X_P(g)Y_P(h) + f(P)g(P)X_P(Yh) - g(P)Y_P(f)X_P(h) - g(P)f(P)Y_P(Xh)$$

$$= f(P)g(P)\{X_P(Yh) - Y_P(Xh)\} + f(P)X_P(g)Y_P(h) - g(P)Y_P(f)X_P(h)$$

$$= (fg)(P)\{X(Yh) - Y(Xh)\}(P) + [f(Xg)(Yh)](P) - [g(Yf)(Xh)](P)$$

$$= \{fg[X(Y) - Y(X)] + f(Xg)Y - g(Yf)X\}(h)(P) = \left([fX, gY]h\right)(P)$$

$$\Rightarrow \quad [fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

Tanım: M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $f \in C^1(M,\mathbb{R})$ olsun. f nin bir $P \in M$ noktasındaki tam diferansiyeli diye, $\forall X_P \in T_M(P)$ için

$$\boxed{(df|_P)(X_P) = X_P(f) = X_P[f]}$$

şeklinde tanımlı $df|_P$ fonksiyonuna denir.

Teorem: M bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve M nin $P \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_M(P)$ olsun. Bu taktirde $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için $df|_P \in T_M^*(P)$ dir.

($T_M^*(P)$: $T_M(P)$ nin dual uzayı)

İspat// $\forall X_P \in T_M(P)$ için, $P \in M$, $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

$$\Rightarrow (df|_P)(\underset{\in T_M(P)}{X_P}) = X_P f = X_P[f] \underset{\in}{} \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P v_i \in \mathbb{R}$$ tanımlandığına göre

$df|_P : T_M(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur.

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$ için

$$df|_P(aX_P + bY_P) \overset{?}{=} a\,df|_P(X_P) + b\,df|_P(Y_P)$$ bakalım.

$$\Rightarrow df|_P(aX_P + bY_P) = (aX_P + bY_P)(f)$$

$$= aX_P(f) + bY_P(f) = a\,df|_P(X_P) + b\,df|_P(Y_P) \quad \text{(lineer)}$$

$df|_P \in T_M^*(P)$ dir. //

Diferensiyel ve Vektör Alanı Arasındaki İlgi :

$df|_p(X_p) = X_p(f)$ idi. Eğer, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $X \in \chi(M)$ ise $df(X) = Xf = X[f]$ şeklinde yazalım. $P \in M$ için;

$(Xf)(P) = X_P(f) = X_P[f]$ ve dolayısıyla $(df(X))(P) = df|_P(X_P)$ olduğundan $df(X) = X(f)$ eşitliği bize,

$$df : \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R}) \text{ olduğunu gösterir.}$$

$df|_P \in T_M^*(P)$ idi.

$$df|_P : T_M(P) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \Rightarrow df|_P \in T_M^*(P)$$

$$df : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} C^\infty(M,\mathbb{R}) \Rightarrow df \in \chi^*(M)$$

Analizdeki Tam Diferensiyel Arasındaki İlgi :

$df|_P(X_P) = X_P(f) = X_P[f]$, $X_P = (v_1, v_2, \dots, v_n)|_P$ olsun.

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P v_i = \langle X_P, \nabla f|_P \rangle$$

$$X_P[x_i] = X_P(x_i) = dx_i|_P(X_P) = v_i$$

$$X_P[x_i] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_P v_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j = v_i$$

$$\Rightarrow df|_P(X_P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P dx_i|_P(X_P)$$

$$\Rightarrow df|_P(X_P) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P dx_i|_P\right)(X_P)$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Not : Analizdeki tam diferensiyel ile burada verilen tam diferensiyel aynıdır.

Tanım : Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ verilsin.

$$dx_i|_P : T_M(P) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X_P \longrightarrow dx_i|_P(X_P) = X_P(x_i)$$

olarak tanımlanan $dx_i|_P$ fonksiyonuna $x_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ koordinat fonksiyonunun diferensiyeli denir.

Teorem : M üzerinde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemi verildiğinde $\forall p \in M$ için $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, 1 \leq i \leq n\right\}$ ve $\{dx_i|_p, 1 \leq i \leq n\}$ sistemleri birbirinin duali olan iki baz oluştururlar.

Bunlardan birincisi $T_M(P)$ nin, ikincisi de $T_M^*(P)$ nin bir bazıdır.

ispat // $dx_i|_p(X_p) = X_p(x_i) \Rightarrow$ özel olarak $X_p = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ alınırsa,

$$\Rightarrow dx_i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p (x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_p$$

$$\Rightarrow dx_i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

$\{dx_i|_p, 1 \leq i \leq n\} = \{dx_1|_p, dx_2|_p, \dots, dx_n|_p\}$ bir bazdır. ?

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1 dx_1|_p + a_2 dx_2|_p + \dots + a_n dx_n|_p = 0$ olsun.

$\Rightarrow \forall \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = e_i|_p$ için;

$$\left(a_1 dx_1|_p + a_2 dx_2|_p + \dots + a_n dx_n|_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = 0\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)$$

$$\Rightarrow a_1 dx_1|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + a_2 dx_2|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \dots + a_n dx_n|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j dx_j|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ji} = 0$$

$\Rightarrow \forall a_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \{dx_i|_p, 1 \leq i \leq n\}$ lineer bağımsızdır.

Hiperyüzeyler

1. Tanım : Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bunun bir H (açık küme) alt manifoldu verilsin. Eğer $\text{boy}M - \text{boy}H = 1$ ise, H alt manifolduna, M de bir hiperyüzey denir.

Tanım : (immersiyon = Daldırma) :

M ve $\overline{M}$, C^∞ sınıfından iki manifold olsun. Eğer bir $f: M \longrightarrow \overline{M}$ dönüşümünün jacobien matrisi regüler ise (Not: minör) bu f dönüşümüne bir immersiyon denir.

2. Tanım : (E^n de hiperyüzey) :

N bir n-1 boyutlu C^∞ sınıfından manifold olsun. Eğer, $f: N \longrightarrow E^n$ fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$

manifolduna, ($M \subseteq E^n$) E^n de bir hiperyüzey denir.

Örnek // $N = E^2$ ve E^3 manifoldlarını alalım.

$f: N \longrightarrow E^3$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x,y,0)$ olsun. f bir immersiyondur. ?

$f = (f_1, f_2, f_3)$

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $Jf = 2$ $\quad Jf$ regülerdir. (Çünkü tanım uzayının rankına eşit.)

$\Rightarrow f: N \longrightarrow E^3$ bir immersiyondur.

$f(N) = M = \{(x,y,0) = (x,y) \in E^2\}$ kümesi E^3 de bir hiperyüzeydir.

3. Tanım :

a) E^n, öklid uzayında $n-1$ boyutlu yüzey (= hiperyüzey) diye, E^n de boş olmayan bir, (U açık alt küme, $\forall p \in M$, $\nabla f|_p \neq 0$ o.ü.)

$$M = \{X : X \in U \subset E^n \wedge f: U \xrightarrow{\text{dif. bilir}} \mathbb{R},\ X \longrightarrow f(X) = c = \text{sabit}\}$$

alt kümesine denir.

b) $n=2$ ise E^2 de 1-yüzey (hiperyüzey)

$$M = \{X = (x,y) : X \in U \subset E^2 \wedge f: U \longrightarrow \mathbb{R},\ X = (x,y) \longrightarrow f(X) = f(x,y) = c = \text{sabit}\}$$

$\Rightarrow \underbrace{f(x,y) = c}_{\text{eğri}} = \text{sabit}$, $\nabla f \neq 0$

Sonuç: E^2 de hiperyüzey, bir düzlemsel eğridir.

c) $n=3$ ise E^3 de 2-boyutlu yüzeye (hiperyüzeye) kısaca, YÜZEY denir.

d) E^n deki $n-1$ yüzeye $n>3$ ise genellikle hiperyüzey denir.

Örnek // $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere E^n de HİPERDÜZLEM ($(n-1)$-düzlem) diye ;

$$M = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : X \in E^n \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\}$$

kümesine denir.

$$f: E^n \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{alınırsa} \Rightarrow f(x)=b=\text{sabit}$$

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ---, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=(a_1, a_2, ---, a_n) \neq 0$$

E^n de hiperdüzlem bir hiperyüzeydir.

Örnek // E^n de birim $(n-1)$-küre ;

$$S^{n-1}=\left\{X=(x_1, x_2, ..., x_n): X \in E^n \wedge \sum_{i=1}^{n} x_i^2=1\right\}$$

olarak tanımlanıyor.

$$f: E^n \longrightarrow IR$$
$$X=(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow f(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{alırsak}, \quad f(x)=1=c \text{ olur.}$$

$$\nabla f(x_1, x_2, ---, x_n)=\underbrace{(2x_1, 2x_2, ---, 2x_n)}_{=\langle(\frac{\partial}{x_1}, --- \frac{\partial}{x_n}), (2x_1, ..., 2x_n)\rangle} \Rightarrow 2\underbrace{(x_1, x_2, ---, x_n)}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Rightarrow \nabla f \neq \vec{0}$ olur.

Sonuç: E^n deki $(n-1)$-küre bir hiperyüzeydir.

$n=1$ ise E^1 de S^0 küre bir nokta ,

$|x|^2=1 \iff x^2=1$

$n=2$ ise E^2 de S^1 küre bir çember ,

$n=3$ ise E^3 de S^2 küre bir küre ,

E^n de S^{n-1} küre bir hiperküredir.

Örnek // E^n de bir U açık alt kümesi verilsin. Bir $f: U \xrightarrow{\text{difbilir}} IR$ fonksiyonu yardımıyla E^n de bir,

$$M=\{X=(x_1, x_2, ..., x_n): X \in E^n \wedge x_n=f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}$$

alt kümesini tanımlayalım. Bu alt kümenin bir hiperyüzey olduğunu gösterelim.

Eğer $g(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)=f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ olarak tanımlarsak ,

$$g(x)=g(x_1, x_2, ---, x_{n-1}, x_n)=0=c \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow M=\{X: X \in E^n \wedge g(x)=0\}$$

$$\nabla g(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, -1\right) \neq 0$$

Sonuç: M bir hiperyüzeydir.

Tanım : (Hiperyüzey Üzerinde İntegral Eğrisi) :

M , E^n de bir hiperyüzey ; X , M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı ($X \in \chi(M)$) ve α , M üzerinde eğri olsun. Eğer α nın herbir t parametre değeri için ;

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise ; α eğrisine , M üzerinde X vektör alanının bir integral eğrisi denir.

Tanım : (Riemann Manifoldu) :

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M üzerindeki reel değerli fonksiyonların kümesi (halkası), $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun.

$$\langle\,,\rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M'ye bir Riemann Manifoldu denir. 6.4.1996 / c.tesi.

Tanım : Riemann manifoldu tanımındaki $\langle\,,\rangle$ iç çarpımına, metrik tensör veya Riemann metriği denir. Önemli

Bir M manifoldu üzerindeki $\chi(M)$ vektör alanları uzayında tanımlı $\langle\,,\rangle$ iç çarpımı verilsin. $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ ise

$\langle X,Y\rangle \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olur. $\forall\, p \in M$ için ;

$\langle X,Y\rangle|_p = \langle X_p, Y_p\rangle \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece
$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y) &\longrightarrow \langle X,Y\rangle \end{aligned}$$

iç çarpımı yardımıyla
$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle|_p : T_M(P) \times T_M(P) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) &\longrightarrow \langle X,Y\rangle|_p = \langle X_p, Y_p\rangle \end{aligned}$$

iç çarpımı elde edilmiş olur.

Tanım : (Yarı Riemann Manifoldu) :

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve M : TANIM

üzerindeki C^∞ sınıfından fonksiyonların kümesi (halkası)

Ödev: $C^\infty(M,\mathbb{R}) : \{f \mid f : M \xrightarrow{C^\infty \text{ sın.}} \mathbb{R}\}$ kümesi birim elemanlı komütatif bir halkadır. $(C^\infty(M,\mathbb{R}), \oplus, \odot)$, cisim değildir.

$\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, $\forall p \in M$,

$(f \oplus g)(p) = f(p) + g(p)$, $(f \odot g)(p) = f(p).g(p)$

$\Downarrow$

olmak üzere, $(C^\infty(M,\mathbb{R}), \odot)$ grup değil.

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$: TANIM

fonksiyonu;

i- 2-lineer (bilineer)lik; (IR'ye göre) $\forall X,Y,Z \in \chi(M) \wedge \forall a,b \in \mathbb{R}$ için

$\langle aX+bY, Z\rangle = a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle$

$\langle X, aY+bZ\rangle = a\langle X,Y\rangle + b\langle X,Z\rangle$

ii- simetri özelliği; $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$

iii- $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $\langle X,Y\rangle = 0 \Rightarrow Y = 0$

özellikleri doğru ise M'ye yarı Riemann Manifoldu denir. : TANIM

Örnek // $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$(X,Y) \longrightarrow \langle X,Y\rangle$ fonksiyonu

$X = (x_1,x_2)$, $Y = (y_1,y_2)$ için,

$\langle X,Y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$ olsun.

iii- $\forall X \in \chi(M)$ için, (iç çarpımda) $\langle X,X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$ dır.

i- $\langle aX+bY, Z\rangle = \langle a(x_1,x_2) + b(y_1,y_2), (z_1,z_2)\rangle$

$= \langle (ax_1+by_1, ax_2+by_2), (z_1,z_2)\rangle$

$= (ax_1+by_1)z_1 - (ax_2+by_2)z_2$

$= a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle$ olur.

Benzer şekilde diğer özellikler gösterilir.

ii- $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$

iii- $\forall X \in \mathbb{R}^2$ için $\langle X,Y\rangle = 0 \overset{?}{\Rightarrow} Y = 0$: TANIM

$X = (1,0)$, $Y = (y_1,y_2) \underset{a)}{\Rightarrow} \langle X,Y\rangle = y_1 - 0 \Rightarrow \underline{y_1 = 0}$

b) $X=(0,1)$ olsun. $\langle X,Y\rangle = 0-y_2=0 \Rightarrow y_2=0$

$\Rightarrow (y_1,y_2)=Y=0$

O halde $\mathbb{R}^2$ bir yarı Riemann manifoldudur.

Riemann manifoldu olması için pozitif tanımlılık özelliği sağlanmalıdır. Bunun sağlanmadığını görelim. (Aksine örnek ile)

$\mathbb{R}^2$ bir Riemann manifoldu değildir.

Örnek // $X=(1,1)$ olsun. Bu tanıma göre $\langle X,X\rangle = 1-1=0$ olur.

O halde Reimann manifoldu değildir.

Her Riemann manifoldu, yarı Riemann manifoldudur. Tersi doğru değildir.

Tanım : (Afin Konneksiyon):

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere ;

$$D: \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow D(X,Y)=D_XY$$

fonksiyonu için :

i- $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$ $\quad \{ X,Y,Z\in\chi(M), f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$

ii- $D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y$

özellikleri sağlanıyorsa D'ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X'e de X'e göre kovaryant türev operatörü denir.

Tanım : (Riemann Konneksiyonu) :

M bir yarı Riemann manifoldu ve D, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun.

i- D, C^∞ sınıfındandır.

ii- M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ sınıfından olan $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $D_XY - D_YX = [X,Y]$ dir.

iii - $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$, A bölgesinde C^∞ sınıfından ve

$\forall P \in M$ için, $X_P \langle Y,Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle|_P + \langle Y, D_X Z \rangle|_P$

özellikleri sağlanıyorsa, D'ye M üzerinde bir Levi-Civita (Riemann) konneksiyonu denir.

Ödev: E^n de tanımlanan D operatörünün Riemann anlamında kovaryant türev operatörü olduğunu gösteriniz.

$X \in \chi(E^n)$ ve $f: E^n \xrightarrow{C^\infty sın.} \mathbb{R}$ $\quad X(f) = X[f] = \langle X, \nabla f \rangle$

Eğer E^n de bir koordinat sistemi $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise $\quad \left\{ \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) \right\}$

$$\Rightarrow X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} x_i$$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$: tanım

Üç özelliğin sağlandığı gösterilir.

Teorem: $X \in \chi(E^n)$ ve $f: E^n \xrightarrow{C^\infty sın.} \mathbb{R}$ olsun.

$X(f) = X[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} x_i \qquad X = (x_i) \;;\; Y = (y_i)$

$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$ olarak tanımlı,

$D: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$

operatörü için:

i - $D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z$

ii - $D_{X+W} Y = D_X Y + D_W Y$

iii - $D_{f(P)X} Y = f(P) D_X Y \Rightarrow D_X Y - D_Y X = [X,Y]$

iv - $D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y$: tanım

v - $[X,Y][f] = X(Yf) - Y(Xf)$

vi - $X[\langle Y,Z \rangle] = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$

Teorem: (Lagrange Çarpan Teoremi):

E^n de bir açık küme U ve U üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun.

$M = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : X \in U \wedge f(x) = c = \text{sabit} \}$ // teoşi

$\forall Q \in M$ için, $\nabla f|_P \neq 0$ (E^n de hiperyüzeydir.)

hiperyüzeyi (M) verilsin. Bir diğer $g: U \longrightarrow \mathbb{R}$

diferensiyellenebilir fonksiyonunun $P \in M$ noktası bir

ekstremum (min. veya max.) noktası ise;

ekstremum noktası:
1°) $\forall Q \in M$, $g(Q) \geq g(P)$: P, g nin minimum noktasıdır.
veya
2°) $\forall Q \in M$, $g(Q) \leq g(P)$: P, g'nin maximum noktasıdır.

$\boxed{\nabla g|_P = \lambda \nabla f|_P}$ olacak şekilde bir λ reel sayısı vardır.

Not: $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$
$X \longrightarrow f(X) = c$, $\nabla f|_P \neq 0$ (hiperyüzey)

Hiperyüzey bir manifold olduğundan bir eğri tanımlanabilir.

$\alpha: I \longrightarrow U \subset M$
$t \longrightarrow \alpha(t)$ olsun.

$f \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longrightarrow (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = c$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} c \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\left\langle \nabla f, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0}$

Bir hiperyüzeyin gradient vektörü, her noktadan geçen her eğrinin teğetine dik olan vektördür.

$\Rightarrow \nabla f|_P \perp \frac{d\alpha}{dt}\Big|_P$ dir.

Örnek // $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ küre üzerinde bir eğri olsun.

$\Rightarrow x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = R^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right] = \frac{dR^2}{dt}$

$\Rightarrow 2\left[x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} + z(t)\frac{dz}{dt}\right] = 0$

$\Rightarrow \left\langle \nabla f, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = 0$

yüzey üzerindeki her eğri, yüzey normaline diktir.

ispat// $T_M(P)$: M nin P'deki tanjant uzayı olsun.

$boy\, M = boy\, T_M(P) = n-1$, $boy\, E^n = n$

$T_M(P)$ nin dik tümleyen uzayı $\{T_M(P)\}^\perp$

$V = W_1 \oplus W_2$

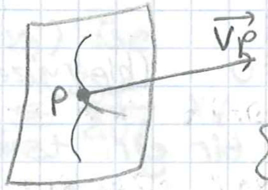
$\forall u \in W_1 \wedge \forall v \in W_2 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

$W_1 = W \wedge W_2 = W^\perp$

$V = W \oplus W^\perp \Rightarrow boy\, V = boy\, W + boy\, W^\perp$

$boy\{T_M(P)\}^\perp = n-(n-1) = n-n+1 = 1$

$T_M(P)$: tanjant uzay



$\vec{V_P} \in T_M(P)$

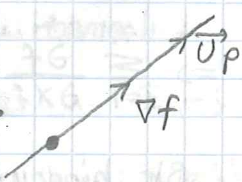
$\{T_M(P)\}^\perp$ dik tümleyen uzay.

Gradient vektörü, $(\nabla f(P))$ M üzerindeki her tanjant vektöre diktir. $\nabla f|_P \neq 0$ dır. O halde lineer bağımsızdır.

$\Rightarrow \{T_M(P)\}^\perp$ uzayı $\nabla f|_P$ tarafından gerilir.

Bu uzaydaki her vektör ∇f nin bir katı olarak yazılabilir.

Eğer, $\vec{U_P} \in \{T_M(P)\}^\perp \Rightarrow \vec{U_P} = a \nabla f|_P$ dir.



Eğer, $\vec{v_P} \in T_M(P) \Leftrightarrow \langle v_P, \nabla f \rangle = 0$ dır.

$\vec{v_P} \in T_M(P) \Rightarrow \alpha : I \longrightarrow M$
$t \longrightarrow \alpha(t)$ vardır ki $\vec{v_P} = \alpha'(t_0)$

ve $P = \alpha(t_0)$ dır.

Ayrıca g fonksiyonu p noktasında extremum (min veya max.) olduğundan $g(P) = g(\alpha(t_0)) = (g \circ \alpha)(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)\Big|_{t_0} = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \nabla g, \frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t_0} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla g \perp \alpha'(t_0) \qquad \forall \alpha : I \longrightarrow M \text{ eğrisi.}$$

$\Rightarrow \nabla g|_P \in (T_M(P))^\perp \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla g|_P = \lambda \nabla f|_P$ dir. //

Özetle: $f: M \longrightarrow IR$ $\quad g: U \longrightarrow IR$

$x \longrightarrow f(x) = c \qquad x \longrightarrow g(x)$

Eğer, p, g nin bir ekstremumu ise $\nabla g|_p = \lambda \nabla f|_p$ dir.

Örnek // M, E^3 de birim küre olsun. Yani; $U \subset E^3$,

$$M = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$

Bir $g: E^3 \longrightarrow IR$

$X = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow g(X) = g(x_1, x_2, x_3)$:

$$g(X) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2b_1 x_1 x_2 + 2b_2 x_1 x_3 + 2b_3 x_2 x_3 = R^2$$

fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulun. $(a_i, b_i \in IR)$

$$\nabla f = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

$$\nabla g = (2a_1 x_1 + 2b_1 x_2 + 2b_2 x_3,\ 2a_2 x_2 + 2b_1 x_1 + 2b_3 x_3,\ 2a_3 x_3 + 2b_2 x_1 + 2b_3 x_2)$$

$p \in M$ noktası ekstremum noktası ise bu noktada,

$\nabla g|_p = \lambda . \nabla f|_p$ olan $\lambda \in IR$ vardır. ?

$$\Rightarrow (2a_1 x_1 + 2b_1 x_2 + 2b_2 x_3,\ 2a_2 x_2 + 2b_1 x_1 + 2b_3 x_3,\ 2a_3 x_3 + 2b_2 x_1 + 2b_3 x_2) = \lambda (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 &= \lambda x_1 \\ a_2 x_2 + b_1 x_1 + b_3 x_3 &= \lambda x_2 \\ a_3 x_3 + b_2 x_1 + b_3 x_2 &= \lambda x_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Bigg\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}}_{A} - \lambda I_3 \Bigg\} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = 0$$

X vektör A matrisi $AX = \lambda X$

$(A - \lambda I)X = 0$ (A'nın özdeğeri = Eigen = karakteristik değeri λ'ya denir.

1° Sonuç: g'nin M üzerindeki ekstremum noktaları,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$ matrisinin öz vektörleridir.

2° Sonuç: Ekstremum değerleri, A nın özdeğerleridir.

$g(P)=\lambda$ dır.

3° Sonuç: Böylece en fazla üç tane nokta ekstremum noktası bulunur. (3. dereceden bir polinomun en az bir reel kökü vardır.) Hiperyüzey üzerinde en az bir ekstremum değeri vardır.

Problemler

1- $a,b,c \in \mathbb{R}$ ve $ac-b^2>0$ olmak üzere

$e=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : f(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=1\}$ elipsi üzerinde $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun maksimum ve minimum noktalarının $\left(\frac{b}{\lambda_1-a},1\right)$ ve $\left(\frac{b}{\lambda_2-a},1\right)$ olduğunu gösterin.

λ_1 ve λ_2 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ nin karakteristik değerleridir.

2- $M=\{(x_1,x_2): f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2=1\}$ çemberi üzerinde $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $g(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ ve $ac-b^2>0$ fonksiyonunun ekstremum değerlerinin $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ matrisinin eigen (öz) değerlerine eşit olduğunu gösteriniz.

3- M olarak $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$ birim hiper küresini, g olarak da $a_{ij}=a_{ji}$ $i,j=1,2,\dots,n$ olmak üzere, $g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ fonksiyonunu alarak, g nin M üzerindeki ekstremum değerlerinin $A=(a_{ij})$ matrisinin eigen değerleri olduğunu gösterin.

4- $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ parabdoidi üzerinde $(0,1,0)$ noktasına en yakın noktaları bulun.

5- Hacmi $8m^3$ olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir deponun maksimum alanını bulun.

Çözümler

1- $\nabla g|_P = \lambda \nabla f|_P$ λ: ekstremum değeri

$\Rightarrow \nabla g = (2x_1, 2x_2)$ $\nabla f = (2a x_1 + 2b x_2, 2b x_1 + 2c x_2)$

$(2x_1, 2x_2) = \lambda(2a x_1 + 2b x_2, 2b x_1 + 2c x_2)$

$x_1 = \lambda(a x_1 + b x_2)$
$x_2 = \lambda(b x_1 + c x_2)$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ ($\frac{1}{\lambda} = \mu$ olarak.)

$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \mu I_2 \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ μ: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ nin özdeğerleridir.

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ nin özdeğerleri : $\left| \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \mu I \right| = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a-\mu & b \\ b & c-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\mu)(c-\mu) - b^2 = 0$

$\Rightarrow \mu^2 - \mu(a+c) + ac - b^2 = 0$

$\Rightarrow \mu_{1,2} = \dfrac{(a+c) \mp \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$

$\Rightarrow \mu_{1,2} = \dfrac{a+c \mp \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ $\nearrow \lambda_1$ $\searrow \lambda_2$

i- $\mu = \lambda_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a-\lambda_1 & b \\ b & c-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow (a-\lambda_1)x_1 + b x_2 = 0$
$b x_1 + (c-\lambda_1) x_2 = 0$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda_1 & b \\ b & c-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$

$(a-\lambda_1)x_1 = -b x_2 \Rightarrow x_2 = 1$ rank $= 1$ $\Big\}$ sonsuz çözüm verdir.

$(?, 1)$
$\downarrow$
x_2

$\Rightarrow (a-\lambda_1)x_1 = -b$

$\Rightarrow x_1 = -\dfrac{b}{a-\lambda_1} = \dfrac{b}{\lambda_1 - a}$

$(x_1, x_2) = \left(\dfrac{b}{\lambda_1 - a}, 1 \right)$

ii- $\mu = \lambda_2$ alınırsa, $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{b}{\lambda_2 - a}, 1 \right)$ olur.

Bunlar minimum değerleridir.

Paraboloit sonsuzda olduğu için, minimum değerdedirler.

4- $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow x^2+y^2-4z=8$

$M=\{(x,y,z): f(x,y,z)=x^2+y^2-4z=8\}$

hiperyüzey (yüzey) dir.

$g(x,y,z)=d^2=x^2+(y-1)^2+z^2$ alınmalıdır.

$\nabla g=\lambda\nabla f \qquad \nabla g=(2x,2(y-1),2z)$

$\nabla f=(2x,2y,-4)$

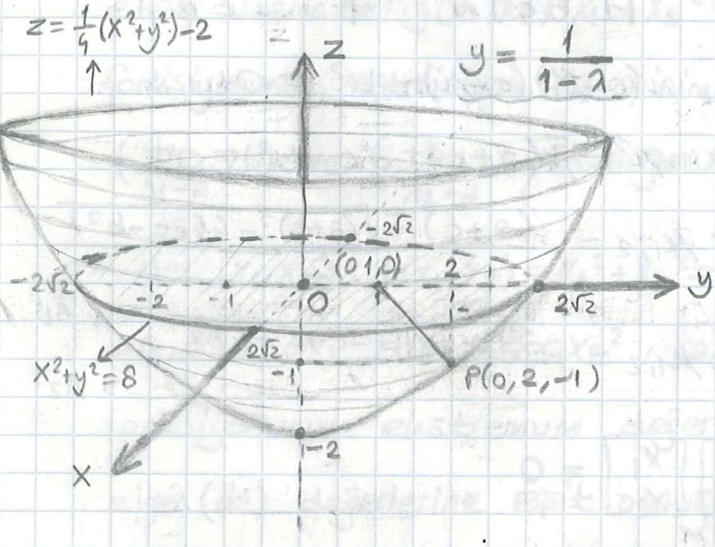
$(2x,2(y-1),2z)=\lambda(2x,2y,-4)$

$2x=\lambda 2x \quad 2(y-1)=2y\lambda,\ 2z=-4\lambda$

$,\ y-1=\lambda y\ ,\ \underline{z=-2\lambda}$

$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$

$y=\frac{1}{1-\lambda}$



$x=0 \Rightarrow$

$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-\lambda)^2}+8\lambda=8$

$\Rightarrow 1+8\lambda(1-\lambda)^2=8(1-\lambda)^2$

$\Rightarrow 1=8(1-\lambda)^2-8\lambda(1-\lambda)^2$

$\Rightarrow 1=8(1-\lambda)^2[1-\lambda]$

$\Rightarrow 1=8(1-\lambda)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{8}=(1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

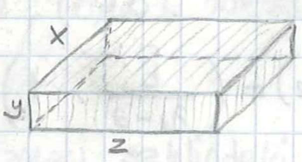
$x=0,\ y=\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$z=-2\lambda=-1$

$P(x,y,z)=P(0,2,-1)$ //

5- $g(x,y,z)=2(xy+xz+yz)$

$M=\{(x,y,z): f(x,y,z)=xyz=8\}$



$\nabla g=\lambda\nabla f$

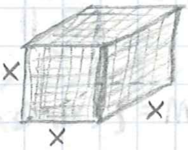
$2(y+z,x+z,x+y)=\lambda(yz,xz,xy)$

$2(y+z)=\lambda yz$
$2(x+z)=\lambda xz$
$2(x+y)=\lambda xy$

$\frac{y+z}{yz}=\frac{x+z}{xz}=\frac{x+y}{xy}$

$$\Rightarrow \frac{x(y+z)}{xyz} = \frac{y(x+z)}{xyz} = \frac{z(x+y)}{xyz} \Rightarrow xy+xz = xy+yz = xz+yz$$
$$\Rightarrow x=y=z$$

O halde verilen depo küp şeklindedir.



$$2(x+y) = \lambda xy \Rightarrow 2(x+x) = \lambda x \cdot x$$
$$\Rightarrow 4x = \lambda x^2 \Rightarrow x = \frac{4}{\lambda} = y = z$$

$$xyz = 8 \Rightarrow \frac{4}{\lambda}\cdot\frac{4}{\lambda}\cdot\frac{4}{\lambda} = 8 \Rightarrow \frac{64}{\lambda^3} = 8 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$x=y=z=\frac{4}{2}=2$$

$\text{Alan} = 2(xy+xz+yz) = 2(4+4+4) = 24\ br^2$ // 13.4.96/C.tesi

Tanım: E^n de bir hiper yüzey M olsun. $\text{Boy}M = n-1 = \text{boy}\,\chi(M) = \text{boy}\,T_M(P)$, $P\in M$. $\text{boy}(\chi(M))^\perp = 1$. Eğer $(\chi(M))^\perp$ uzayının bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N'ye M'nin birim normal vektör alanı denir.

Örnek // $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c = \text{sabit},\ g \in C(E^n, \mathbb{R})\}$ kümesi verilsin. Eğer $\nabla g \neq 0$ ise; M, E^n de bir hiperyüzeydir.

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{e_i} \in \chi(E^n)$$

$\alpha : I \longrightarrow M$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ bir eğri olsun. (M'de)
$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$

$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$
$x = (x_i) \longrightarrow g(x_i) = g(x) = c = \text{sabit}$
$1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow g\circ\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longrightarrow (g\circ\alpha)(t) = g(\alpha(t)) = \text{sabit} = c$

$$\frac{d(g(\alpha(t)))}{dt} = \frac{d(g\circ\alpha)}{dt}\Big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t = 0$$

$$\Rightarrow \langle \nabla g|_{\alpha(t)}, \alpha'(t)\rangle = 0 \Rightarrow \nabla g|_{\alpha(t)} \perp \alpha'(t)$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) \in T_M(\alpha(t)) \Rightarrow \nabla g|_{\alpha(t)} \in [T_M(\alpha(t))]^\perp$$

$\Rightarrow \nabla g \in [\chi(M)]^\perp \wedge \nabla g \neq 0$ olduğundan, $\{\nabla g\}$, $\chi(M)^\perp$ in bir bazıdır.

M nin birim normal vektör alanı;

$$N = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \quad \text{olur.}$$

Örnek // $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2\}$, E^n deki r yarıçaplı küre (hiperküre)

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \Rightarrow g : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \nabla g = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \Rightarrow \|\nabla g\| = 2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

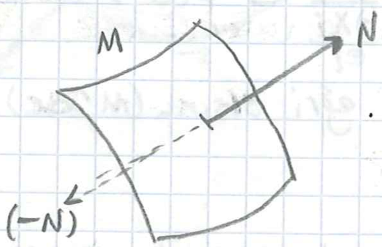
$$\nabla g = 2r \Rightarrow N = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{\cancel{2}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\cancel{2}r}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}}{r} \in \chi(M)^{\perp}$$

E^n deki hiper kürenin birim normal vektör alanıdır.

Tanım: (Hiperyüzeylerde Yönlendirme):

Bir hiperyüzeyin birim normal vektör alanı N olsun. (−N) de hiperyüzey üzerinde diğer bir birim normal vektör alanıdır.

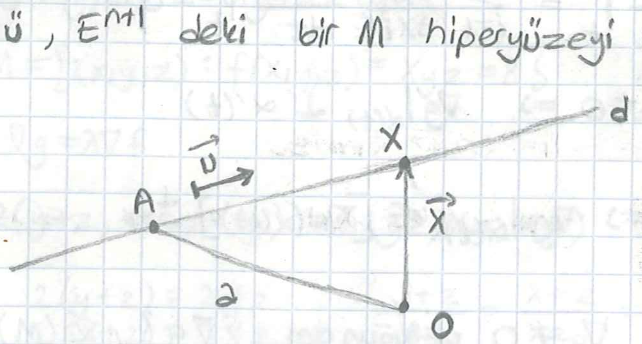


Eğer birim normal vektör alanı için, hiperyüzey üzerinde bir yön seçilmişse; (dışa yönelik vektör alanı N, veya içe yönelik vektör alanı (−N)) hiperyüzeye, yönlendirilmiştir denir.

Hiperyüzey Üzerinde Jeodezikler

Jeodezikler, öyle eğrilerdir ki, E^n de doğruların oynadığı rolü, E^{n+1} deki bir M hiperyüzeyi üzerinde oynarlar.

Örnek //



(E^n de)

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\vec{U} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \qquad \vec{X} = \vec{a} + \overrightarrow{AX} \qquad \overrightarrow{AX} = t\vec{U}$

1° $\vec{X} = \vec{a} + t\vec{U}$, $t \in \mathbb{R}$

2° $(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_1, a_2, ..., a_n) + t(b_1, b_2, ..., b_n)$

$\Rightarrow x_i = a_i + b_i t \qquad 1 \leq i \leq n$

3° $b_i \neq 0 \qquad \frac{x_1 - a_1}{b_1} = ... = \frac{x_n - a_n}{b_n}$ kartezyen denklem.

Sonuçlar :

a) $X' = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{U} = \text{sabit}$ (hız vektörü sabittir.)

b) $X'' = \frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \forall v \in \chi(E^n)$ için $\vec{v} \perp X''$ olur.

(ivme vektörü, vektör alanına diktir.)

$\Rightarrow X'' \in [T_{E^n}(P)]^{\perp}$

c) $X'' = 0 = ... = X^{(n)}$

Tanım : (Jeodezik) :

M, E^{n+1} de bir hiperyüzey ve $\alpha : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü, M nin bu noktadaki tanjant uzayına ortogonal ise $\{$ yani $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$, $\forall t \in I$ için. $\}$ α'ya M üzerinde bir jeodezik eğri, kısaca jeodezik denir.

Teorem : Jeodeziklerin her noktasındaki hız vektörlerinin uzunlukları sabittir.

İspat // $\alpha : I \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ bir jeodezik olsun. $\Rightarrow \alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 2\underbrace{\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}_{0} = 0$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = \text{sabit} \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \text{sabit}.$

Hiperyüzey üzerindeki jeodeziğin, hız vektörü sabit bir vektördür.

Örnek // E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. Eğer M bir doğru parçasını kapsıyorsa, bu doğru parçası M üzerinde bir jeodeziktir.

$$\alpha : I \longrightarrow M$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = \vec{P} + t\vec{v}$$ fonksiyonu tanımlanırsa,

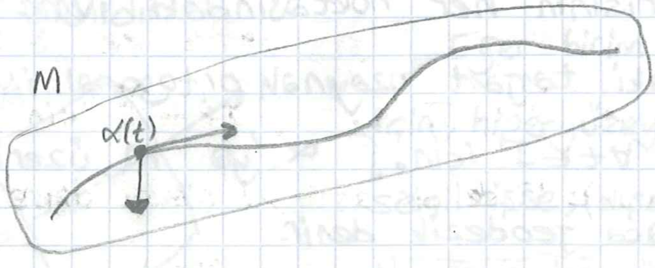
$\forall t \in I$ için, $\alpha''(t) = 0 \Rightarrow \alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$

$\Rightarrow \alpha$, M üzerinde bir jeodeziktir. //

Örnek // E^3 de $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ silindiri üzerinde
$$\alpha : I \longrightarrow M$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, eğrisi veriliyor. Bu eğrinin silindir üzerinde bir jeodezik olup olmadığını araştırın.

$$\alpha'(t) = (-a\sin(at+b), a\cos(at+b), c)$$
$$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b), -a^2\sin(at+b), 0)$$
$$= -a^2(\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$$



$f : x_1^2 + x_2^2 = 1$, $\quad \nabla f = (2x_1, 2x_2, 0)$

$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{2(x_1, x_2, 0)}{2\underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{1}} \Rightarrow N = (x_1, x_2, 0)$$

$$N|_{\alpha(t)} = N(\alpha(t)) = (\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$$
$$\alpha''(t) = -a^2 N|_{\alpha(t)} \Rightarrow \alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$$

$\Rightarrow \alpha$, M üzerinde bir jeodeziktir. //

Örnek // E^3 de $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ birim küresi üzerinde, T_{E^3} ün bir ortonormal bazı $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ olmak üzere ;

$\alpha : I \longrightarrow S^2$
$t \longrightarrow \alpha(t) = \vec{e_1}\cos at + \vec{e_2}\sin at$ çemberi (büyük çember)

küre üzerinde bir jeodeziktir.

$$\alpha'(t) = -\vec{e_1}.a\sin at + \vec{e_2}.a.\cos at$$

$$\alpha''(t) = -\vec{e_1}\, a^2\cos at - \vec{e_2}\, a^2 \sin at$$

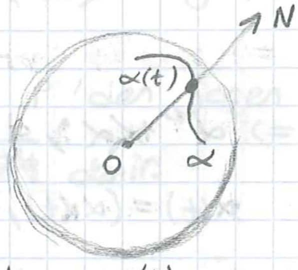
$$= -a^2(\vec{e_1}\cos at + \vec{e_2}\sin at)$$

$$\vec{N}|_{\alpha(t)} = \alpha(t) = (\cos at, \sin at, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha''(t) = -a^2 N|_{(\alpha(t))}$$

$$\Rightarrow \alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$$

$\Rightarrow \alpha$ bir jeodeziktir.



$$N|_{\alpha(t)} = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$$

Teorem: E^{n+1} de bir hiperyüzey M, $P \in M$ ve $\vec{V_P} \in T_M(P)$ olsun. Bu taktirde $0 \in \mathbb{R}$ yi kapsayan bir I açık aralığı ve bir $\alpha : I \longrightarrow M$ jeodezik eğrisi vardır ki;

a- $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \vec{V_P}$.

b- $\beta : \tilde{I} \longrightarrow M$ diğer bir jeodezik ve $\beta(0) = P$, $\beta'(0) = \vec{V_P}$ ise $\tilde{I} \subset I$ dır ve $\forall t \in \tilde{I}$ için $\beta(t) = \alpha(t)$.

İspat // M nin denklemi, E^{n+1} de bir açık U olmak üzere

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (1 \le i \le n)$
$X = (x_i) \longrightarrow f(X) = c$ olsun.

$\vec{\nabla} f|_P \neq \vec{0}$, $\forall P \in M$. $\Rightarrow N|_P = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_P$ alınabilir. Eğer α, M de bir jeodezik ise

$$\Rightarrow \alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t)) \Rightarrow \alpha''(t) = g(t) N|_{\alpha(t)}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha''(t), N|_{\alpha(t)} \rangle = \langle g(t) N|_{\alpha(t)}, N|_{\alpha(t)} \rangle$$

$$= g(t) \underbrace{\langle N|_{\alpha(t)}, N|_{\alpha(t)} \rangle}_{1}$$

$$\Rightarrow g(t) = \langle \alpha''(t), N|_{\alpha(t)} \rangle$$

$$\Rightarrow g(t) = \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle$$

$$= \langle \alpha''(t), (N \circ \alpha)(t) \rangle$$

$$(\alpha^{\bullet}, N\circ\alpha)^{\bullet} = \frac{d}{dt}\langle \alpha^{\bullet}, N\circ\alpha\rangle = \langle \alpha^{\bullet\bullet}, N\circ\alpha\rangle + \langle \alpha^{\bullet}, \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\rangle$$

$$= \langle \alpha^{\bullet\bullet}, N\circ\alpha\rangle = \langle \alpha^{\bullet}, N\circ\alpha\rangle^{\bullet} - \langle \alpha^{\bullet}, \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\rangle$$

$$\langle \alpha^{\bullet}, N\circ\alpha\rangle = \langle \alpha^{\bullet}, N_\alpha\rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha^{\bullet}, N\circ\alpha\rangle^{\bullet} = 0$$

$$\Rightarrow \langle \alpha^{\bullet\bullet}, N\circ\alpha\rangle = -\langle \alpha^{\bullet}, \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\rangle$$

$$\Rightarrow g = -\langle \alpha^{\bullet}, \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\rangle \quad \Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} = g(t)\,N\alpha(t)$$

$$\Rightarrow \alpha''(t) - g(t)\,N\alpha(t) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} + \langle \alpha^{\bullet}, \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\rangle (N\circ\alpha) = 0$$

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve

$N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ olarak yazılırsa,

$$\Rightarrow N\circ\alpha = N(\alpha) = (N_1(\alpha), N_2(\alpha), \dots, N_n(\alpha))$$

$$= (N_1\circ\alpha, N_2\circ\alpha, \dots, N_n\circ\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(N\circ\alpha) = \left(\frac{d}{dt}(N_1\circ\alpha), \frac{d}{dt}(N_2\circ\alpha), \dots, \frac{d}{dt}(N_n\circ\alpha)\right)$$

$$\frac{d}{dt}(N_i\circ\alpha) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_j}\frac{d\alpha_j}{dt}$$

$$N\circ\alpha = \sum N_i(\alpha)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha^{\bullet} = \sum \alpha_i^{\bullet}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{d}{dt}(N\circ\alpha) = \sum_k \sum_J \frac{\partial N_i}{\partial x_j}\frac{d\alpha_j}{dt}\frac{d}{dx_k}$$

$$\alpha'' = \sum_{i=1} \alpha_i^{\bullet\bullet}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\alpha^{\bullet\bullet}$ nün, j.-inci bileşeni; $(1 \le i \le n+1)$

$$\frac{d^2\alpha_j}{dt} + \sum_{j,k} N_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \left.\frac{\partial N_j}{\partial \alpha_j}\right|_\alpha \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt} = 0$$

2. mertebeden
(diferansiyel denklem sistemi)

$\alpha = \alpha(t)$ bu sistemin çözümü olsun.

$\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \vec{v}_p$ olan birtek çözüm vardır.

$\alpha_1(0) = P_1, \dots, \alpha_n(0) = P_n$

$\alpha_1'(0) = v_{p_1}, \dots, \alpha_n'(0) = v_{p_n}$

Bir $P \in M$ den geçen jeodezik vardır.

$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $V_P = (v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) \Rightarrow \alpha(0) = P,\ \alpha'(0) = V_P$

Eğer $\beta(0) = P,\ \beta'(0) = V_P$ olmak üzere bir,

$\beta : I_2 \longrightarrow M$ çözümü varsa,

$\alpha : I \longrightarrow M \Rightarrow \forall t \in I \cap I_2$ için $\beta(t) = \alpha(t)$ olur.

$\tilde{I} = I \cap I_2 \subset$

Tanım: Bu α jeodezik eğrisine M üzerinde P'den geçen ve başlangıç hızı $\vec{V_P}$ olan <u>MAKSIMAL jeodezik</u> denir.

Problemler

1- $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_1^2 - x_2\} \subset E^3$ yüzeyinin $P(1,0,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini yazın. (37/1)

2- $F(x,y,z) = x^2y + xz$ fonksiyonunun $\vec{v} = (2,-2,1)$ vektörü doğrultusundaki türevinin $P(1,2,-1)$ noktasındaki değeri nedir?

3- $F(x,y,z) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun, $x^2+y^2+z^2 = 4$ yüzeyinin normali boyunca türevini hesaplayınız.

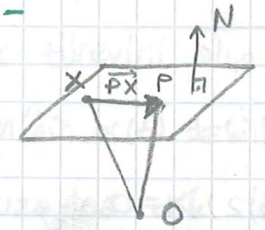
4- $xyz = x^2 + 2$ yüzeyinin $M(2,1,3)$ noktasındaki normal vektörünü teğet düzlemini ve normalin denklemini bulun.

5- $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\} \subset E^3$

$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \cdot x_3 - x_2 = 0\} \in E^3$ yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, ?)$ noktasındaki ... (bk. çözüm 5) (38/8)

Çözümler

1-



$M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1^2 - x_2\}$ $P(1,0,1)$

yüzeyin normalini bulalım. $N \perp PX$ dir.

$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_1^2 + x_2$ dersek,

$N = \vec{\nabla} f = (F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}) = (-2x_1, 1, 1)$

$N|_P = (-2, 1, 1)$

$X=(x_1,x_2,x_3)$ alınırsa,

$$\vec{PX}=\vec{X}-\vec{P}=(x_1,x_2,x_3)-(1,0,1)=(x_1-1,x_2,x_3-1)$$

$$\langle \vec{PX},\vec{N}\rangle=\langle (x_1-1,x_2,x_3-1),(-2,1,1)\rangle=0$$

$$\Rightarrow -2x_1+x_2+x_3+1=0$$

teğet düzlem denklemidir. //

2 − $F(x,y,z)=x^2y+xz$ $V=(2,-2,1)$, $P=(1,2,-1)$

$\nabla F=(2xy+z,\,x^2,\,x)$ $\nabla F|_P=(3,1,1)$

$\|V\|=\sqrt{4+4+1}=3$

$$\frac{V}{\|V\|}=\frac{(2,-2,1)}{3}\Rightarrow \left\langle \nabla F|_P,\frac{V}{\|V\|}\right\rangle=\left\langle(3,1,1),\tfrac{1}{3}(2,-2,1)\right\rangle=\frac{5}{3} //$$

3 − $F=x^2-y^2$, $x^2+y^2+z^2=4$

$\nabla F=(2x,-2y,0)$ $G=x^2+y^2+z^2-4=0$ diyelim.

G nin normali $\vec{n}$ olsun. $\frac{\partial F}{\partial n}=\left\langle \nabla F,\frac{n}{\|n\|}\right\rangle$ yi bulmalıyız.

$$\frac{n}{\|n\|}=\frac{1}{\|n\|}\operatorname{grad}G$$

$$=\frac{1}{\|n\|}(2x,2y,2z)=\frac{\cancel{2}(x,y,z)}{\cancel{2}\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{2}}}=\frac{1}{2}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\left\langle \vec{\nabla}F,\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle=\left\langle(2x,-2y,0),\tfrac{1}{2}(x,y,z)\right\rangle=x^2-y^2=F //$$

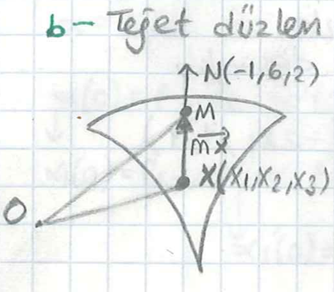
Bir fonksiyonun yüzeyinin normali boyunca türevi yine o fonksiyonu verir.

4 − $xyz=x^2+2$, $M(2,1,3)$, $F(x,y,z)=xyz-x^2-2$

a − Normal vektörü; $\nabla F=(yz-2x,\,xz,\,xy)$

$$\nabla F|_M=(-1,6,2) //$$

b − Teğet düzlem denklemi: $\langle \vec{MX},\vec{N}\rangle=0$ olmalı.



$$\langle (x_1,x_2,x_3)-(2,1,3),(-1,6,2)\rangle=0$$

$$\Rightarrow 2-x_1+6x_2-6+2x_3-6=0$$

$$\Rightarrow -x_1+6x_2+2x_3-10=0 //$$

c- $\frac{x-x_1}{F_x|_p} = \frac{y-y_1}{F_y|_p} = \frac{z-z_1}{F_z|_p}$ $\qquad \nabla F=(-1,6,2)$

$x_1=2 \quad y_1=1 \quad z_1=3$

$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{2}$ normalin denklemidir. //

5- $M_1=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2=4\}$ $\quad M_2=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1x_3-x_2=0\}$

$P(\sqrt{2},\sqrt{2},?)$ (Frenet vektörlerini bulun. ödev.)

M_1 de, $x_1=2\cos\theta$, $x_2=2\sin\theta$;

M_2 de, $x_3=\frac{x_2}{x_1}=\tan\theta$

$\alpha(\theta)=(2\cos\theta, 2\sin\theta, \tan\theta)$

$\left.\begin{array}{l} 2\sin\theta=\sqrt{2} \\ 2\cos\theta=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$x_3=\tan\theta \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow P(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$ olur. //

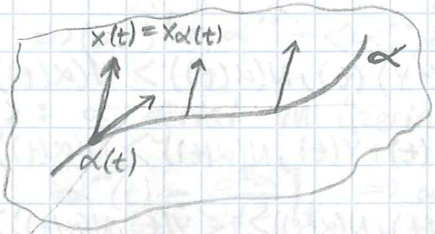
Levi-Civita Paralelliği

20.4.96/C.tesi

Tanım: (Bir hiperyüzey üzerinde bir eğriye kısıtlanmış vektör alanı):

M bir hiperyüzey, $\alpha: I \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ bir eğri ve $X \in \chi(M)$ olsun.

Eğer $\forall t \in I$ için $X(t)=X_{\alpha(t)} \in T_M(\alpha(t))$ ise X vektör alanı, M üzerindeki α eğrisine kısıtlanmıştır denir.

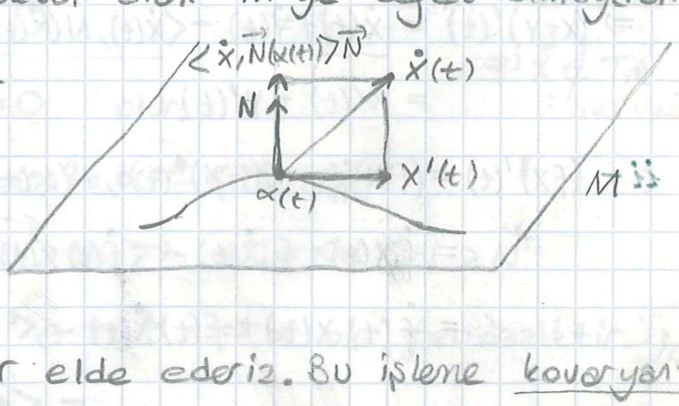


Bir M hiperyüzeyi üzerinde bir α eğrisine kısıtlanmış bir X vektör alanı verilsin. X'in türevi

$\dot{X}=\frac{dX}{dt}$ olsun. $\dot{X}$ vektör alanı M ye teğet olmayabilir.

$\dot{X}(t) \notin T_M(\alpha(t))$ genel olarak

X türevini alıp daha sonra M'nin $\alpha(t)$ deki tanjant uzayına dik izdüşüm



alarak, bir tanjant vektör elde ederiz. Bu işleme kovaryant diferensiyel denir.

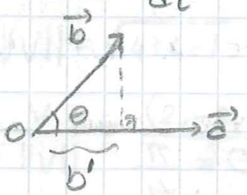
Tanım: (Kovaryant Diferensiyel):

M, E^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. $\alpha: I \longrightarrow M$ bir parametrik eğri ve X, M üzerinde α'ya kısıtlanmış bir eğri (α boyunca M'ye kısıtlanmış bir eğri) olsun.

$$\boxed{X'(t) = \dot{X}(t) - \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))}$$

ifadesine X vektör alanının kovaryant diferensiyeli denir.

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt}(t) \qquad \dot{X}(t) = X'(t) + \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$



$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| \cos\theta$$
$$= \|\vec{a}\| . \|b'\|$$
$$\langle \dot{X}, \vec{N} \rangle = \|X'\|_N \|\vec{N}\| = \|X'\|_N$$

Sonuç: $X'(t) \in T_M(\alpha(t))$ //

Teorem: M bir hiperyüzey, α bir eğri ($\alpha: I \longrightarrow M$) ve X, Y de α boyunca M'ye teğet olsun.

i- $(X+Y)' = X' + Y'$

ii $(fX)' = f'X + fX'$ $\qquad f' = \dfrac{df}{dt}$, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$

iii- $\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$

İspat // i- $(X+Y)'(t) = (X+Y)^{\bullet}(t) - \langle (X+Y)^{\bullet}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$

$$= \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) - \langle \dot{X}(t) + \dot{Y}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

$$= \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) - \{ \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot{Y}(t), N(\alpha(t)) \rangle \} N(\alpha(t))$$

$$\Rightarrow (X+Y)'(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) - \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t)) - \langle \dot{Y}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

$$= X'(t) + Y'(t)$$

ii- $(fX)'(t) = (fX)^{\bullet}_{(t)} - \langle (fX)^{\bullet}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$

$$= \dot{f}_{(t)} X(t) + f_{(t)} \dot{X}(t) - \langle \dot{f}(t) X(t) + f_{(t)} \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

$$= \dot{f}(t) X(t) + f(t) \dot{X}(t) - \langle \dot{f}(t) X(t), \cancel{N}(\alpha(t)) \rangle \cdot \cancel{N}(\alpha(t)) -$$

$$- \langle f(t) \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

$$= \dot{f}(t)X(t) + f(t)\dot{X}(t) - \dot{f}(t)\overbrace{<X(t), N(\alpha(t))>}^{0} N(\alpha(t))$$

$$- f(t) <\dot{X}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t))$$

$$= \dot{f}(t)X(t) + f(t)\{ X'(t) - <\dot{X}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t)) \}$$

$$= f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

iii $-$ $<X,Y>' = <X,Y>^{\bullet} = <X',Y> + <X,Y'>$?

$$<X',Y>\big|_t + <X,Y'>\big|_t = <\dot{X}(t) - <\dot{X}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t)), \dot{Y}(t)>$$

$$+ <X(t), \dot{Y}(t) - <\dot{Y}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t))> \quad = 0$$

$$= <\dot{X}(t), Y(t)> + <-<\dot{X}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t)), Y(t)>$$

$$+ <X(t), \dot{Y}(t)> + <X(t), -\underbrace{<\dot{Y}(t), N(\alpha(t))> N(\alpha(t))}_{=0}>$$

$$= <\dot{X}(t), Y(t)> + <X(t), \dot{Y}(t)>$$

$$= <X,Y>^{\bullet}(t) = <X,Y>'(t)$$

$$\Rightarrow <X,Y>' = <X,Y>^{\bullet} = <X',Y> + <X,Y'>$$

Teorem: M bir hiperyüzey olsun. $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisinin M üzerinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter şart; α nın, $(\alpha^{\bullet})'$ kovaryant ivmesinin α boyunca sıfır olmasıdır.

İspat // $X' = \dot{X} - <\dot{X}, N> N$

$\Rightarrow (\alpha^{\bullet})' = \alpha^{\bullet\bullet} - <\alpha^{\bullet\bullet}, N> N$ (tanımdan)

$\Rightarrow$: α eğrisi M üzerinde bir jeodezik olsun.

$$\alpha^{\bullet\bullet}(t) - \frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big|_t \Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet}(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t)) \Rightarrow (\alpha^{\bullet})^t \in T_M^{\perp}$$

$$X = \alpha' \Rightarrow X' = (\alpha^{\bullet})' \in T_M \qquad \left\{ \begin{array}{l} X \in T_M \Rightarrow X' \in T_M \\ \Rightarrow \dot{X} \notin T_M \end{array} \right.$$

$(\alpha^{\bullet})^t \in T_M^{\perp} \Rightarrow (\alpha^{\bullet})' = 0$ olur.

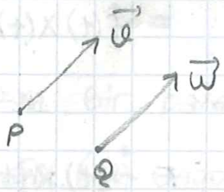
$\Leftarrow$: $(\alpha^{\bullet})' = 0$ olsun. $\Rightarrow (\alpha^{\bullet})' = \alpha^{\bullet\bullet} - <\alpha^{\bullet\bullet}, N> N$

$$\Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} = \underbrace{(\alpha^{\bullet})'}_{0} + <\alpha^{\bullet\bullet}, N> N \Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} = <\alpha^{\bullet\bullet}, N> N$$

$\Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} = \lambda N \Rightarrow \alpha^{\bullet\bullet} \in T_M^{\perp} \Rightarrow \alpha$ bir jeodeziktir. //

Tanım 1. $\vec{v}_P = (P, \vec{v})$, $\vec{w}_Q = (Q, \vec{w})$

$\vec{v}_P = \vec{w}_Q \iff P = Q \wedge \vec{v} = \vec{w}$



Tanım 2. E^{n+1} de iki tanjant vektör,

$\vec{v}_P = (P, \vec{v})$ ve $\vec{w}_Q = (Q, \vec{w})$ olsun. Eğer $\vec{v} = \vec{w}$ ise $\vec{v}_P$ ve $\vec{w}_Q$ tanjant vektörleri "Euclidean anlamında paraleldirler" denir. – iii

Tanım 3 $\alpha : I \longrightarrow E^{n+1}$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ parametrik eğrisi boyunca bir vektör alanı X olsun. Eğer her $t_1, t_2 \in I$ için $X(t_1) = X(t_2)$ ise X vektör alanı, α boyunca E^{n+1} de Euclidean anlamında paraleldir denir.

Sonuç: Eğer X vektör alanı E^{n+1} de bir α eğrisi boyunca Euclide anlamında paralel ise $\forall t \in I$ için; $X(t) = X(t+\Delta t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(t+\Delta t) - X(t) = 0 \Rightarrow \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dX(t)}{dt} = 0} \text{ dır.}$$

$(\dot{X} = 0)$

$X(t) = X(\alpha(t)) = (\alpha(t), \vec{X})$

Tanım: (Levi – Civita Paralelliği):

E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir parametrik eğri α olsun. Eğer $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi boyunca bir diferensiyellenebilir X vektör alanı için $X' = 0$ (kovaryant diferensiyel) ise X vektör alanı Levi-Civita anlamında paraleldir denir. (tanjant vektörler paraleldir.)

Teorem: (Levi-Civita anlamındaki paralelizmin özellikleri):

i- Eğer α boyunca bir X vektör alanı Levi-Civita anlamında paralel ise X'in uzunluğu sabittir.

ii- Eğer α boyunca X ve Y vektör alanları Levi-Civita anlamında paralel iseler $\langle X, Y \rangle$ sabittir.

iii- Eğer α boyunca X ve Y vektör alanları Levi-Civita anlamında paralel ise, aralarındaki açı sabittir.

iv- Eğer α boyunca X ve Y vektör alanları Levi-Civita anlamında paralel ise, $X+Y$ de α boyunca Levi-Civita anlamında paraleldir.

v- Eğer α boyunca bir X vektör alanı Levi-Civita anlamında paralel ise $\forall c \in \mathbb{R}$ için cX de α boyunca Levi-Civita anlamında paraleldir.

vi- Bir M hiperyüzeyi üzerindeki bir α parametrik eğrisi boyunca α nın hız vektörünün Levi-Civita anlamında paralel olması için gerek ve yeter şart, α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır.

İspat// **i-** X vektör alanı α boyunca Levi-Civita anlamında paralel olsun. $\Rightarrow X'=0$.

N, M nin birim normal vektör alanı $\Rightarrow \langle X,N\rangle = 0$

$$\Rightarrow X' = \dot{X} - \langle \dot{X}, N\rangle N \Rightarrow \dot{X} = X' + \langle \dot{X}, N\rangle N \Rightarrow \dot{X} = \langle \dot{X}, N\rangle N$$

$$\Rightarrow \langle \dot{X}, X\rangle = \langle \langle \dot{X}, N\rangle N, X\rangle = \langle \dot{X}, N\rangle \underbrace{\langle N, X\rangle}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \langle \dot{X}, X\rangle = 0$ olur.

$$\langle X, X\rangle = \|X\|^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\|X\|^2 = \frac{d}{dt}\langle X, X\rangle =$$

$$= \langle \dot{X}, X\rangle + \langle X, \dot{X}\rangle = 2\underbrace{\langle \dot{X}, X\rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|X\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|X\|^2 = \text{sabit} \Rightarrow \|X\| = \text{sabit} //$$

ii- $\langle X,Y\rangle^{\cdot} = \langle X,Y\rangle' = \langle X',Y\rangle + \langle X,Y'\rangle = \langle \underbrace{0}_{0},Y\rangle + \langle X,\underbrace{0}_{0}\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle X,Y\rangle^{\cdot} = 0 \Rightarrow \langle X,Y\rangle = \text{sabit}$

iii- X ve Y, α boyunca Levi-Civita anlamında paralel olsun.

$\cos\theta = \dfrac{\langle X, Y\rangle \to \text{sabit}}{\underbrace{\|X\|}_{\text{sabit}}.\underbrace{\|Y\|}_{\text{sabit}}} \Rightarrow \cos\theta = \text{sabit}$ olur. // — iii

iv – X ve Y, Levi-Civita anlamında paralel ise $X'=0$, $Y'=0$ · v

$\Rightarrow (X+Y)' = X'+Y' = 0+0 = 0 \Rightarrow (X+Y)'=0$

$\Rightarrow$ X+Y de Levi-Civita anlamında paraleldir. //

v – X, Levi-Civita anlamında paralel ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. — v

$(cX)' = \underbrace{c'}_{0}X + cX' = cX' = c.0 = 0$

$\Rightarrow (cX)' = 0 \Rightarrow cX$ de Levi-Civita anlamında paraleldir. — vi

vi – $\Rightarrow$: α nın hız vektörü $\dot\alpha$, α boyunca Levi-Civita anlamında paralel olsun $\Rightarrow (\alpha^{\cdot})' = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha^{\cdot})'}_{0} = \alpha^{\cdot\cdot} - \langle \alpha^{\cdot\cdot}, N\rangle N = 0$

$\Rightarrow \alpha^{\cdot\cdot} = \langle \alpha^{\cdot\cdot}, N\rangle N \Rightarrow \alpha^{\cdot\cdot} = \lambda N \Rightarrow \alpha^{\cdot\cdot} \in T_M^{\perp}$ — i // değil

$\Rightarrow \alpha$ bir jeodeziktir.

$\Leftarrow$: α bir jeodezik ise $\alpha^{\cdot\cdot} \in T_M^{\perp} \Rightarrow \alpha^{\cdot\cdot} = (\alpha^{\cdot})' + \langle \alpha^{\cdot\cdot}, N\rangle N$

$\Rightarrow (\alpha^{\cdot})' = 0 \Rightarrow \dot\alpha$, α boyunca Levi-Civita anlamında paraleldir.

Teorem: E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde bir parametrik eğri $\alpha: I \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ olsun. $\forall t_0 \in I$ ve $V_{\alpha(t_0)} \in T_M(\alpha(t_0))$ olsun. α boyunca M'ye teğet olan $V(t_0) = \vec{V}_{\alpha(t_0)}$ özelliğine sahip olan bir tek Levi-Civita anlamında paralel, V vektör alanı vardır.

İspat // Öyle bir V vektör alanı arıyoruz ki, α eğrisi boyunca M'ye teğet olacak ve $V'=0$ olacaktır. — ii

$\Rightarrow V' = V^{\cdot} - \langle \dot V, N\circ\alpha\rangle (N\circ\alpha)$ ayrıca,

$\langle V, N\circ\alpha\rangle^{\cdot} = \langle \dot V, N\circ\alpha\rangle + \langle V, (N\circ\alpha)^{\cdot}\rangle$ olduğundan — iii

$$\Rightarrow V' = V^{\circ} - \{\overbrace{\langle V, N\circ\alpha\rangle^{\circ}}^{0} - \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle\}(N\circ\alpha)$$

$$\{\langle V, N\circ\alpha\rangle|_t = \langle V(t), N(\alpha(t))\rangle = 0\}$$

$$\Rightarrow V' = \dot{V} + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle (N\circ\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow V^{\circ} + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle (N\circ\alpha) = 0$$ 1. mertebeden dif. denklem.

$$\Rightarrow V^{\circ} = -\langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle (N\circ\alpha)$$

$$V(t) = \vec{V}_{\alpha(t)} = (\alpha(t), \vec{V}) = (\alpha(t); (V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)))$$

$$(N\circ\alpha)(t) = N(\alpha(t)) = N_{\alpha(t)} = (\alpha(t); (N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)))$$

$$\Rightarrow \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle|_t = \sum_{j=1}^{n+1} N_j V_j$$

$$\Rightarrow V^{\circ} + \left(\sum_{j=1}^{n+1} N_j V_j\right)(N\circ\alpha) = 0 \qquad V^{\circ} = (V_1^{\circ}, V_2^{\circ}, \dots, V_n^{\circ})$$

$$\Rightarrow \frac{dV_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n+1} (N_j V_j) N_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

bu diferensiyel denklem sistemidir.

$$i=1, \quad \frac{dV_1}{dt} = N_1(N_1V_1 + \dots + N_{n+1}V_{n+1}) = 0$$

$$i=n+1, \quad \frac{dV_{n+1}}{dt} = N_n(N_1V_1 + \dots + N_{n+1}V_{n+1}) = 0$$

n-bilinmeyenli ve n-denklemli lineer denklem sistemi.

$V(t_0) = \vec{V}_{\alpha(t_0)}$ başlangıç şartı veya $V_i(t_0) = v_i$, $1 \leq i \leq n+1$

$\vec{V}_{\alpha(t_0)} = (\alpha(t_0), V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$ diferensiyel denklemleri için varlık ve teklik teoreminden böyle birtek V vektör alanı vardır. V'nin α boyunca M'ye teğet olduğunu gösterelim:

$$\langle V, N\circ\alpha\rangle^{\circ} = \langle V^{\circ}, N\circ\alpha\rangle + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle$$

$$= \langle -\langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle N\circ\alpha, N\circ\alpha\rangle + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle$$

$$= -\langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle \underbrace{\langle N\circ\alpha, N\circ\alpha\rangle}_{1} + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle$$

$$= -\langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle + \langle V, (N\circ\alpha)^{\circ}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle V, (N\circ\alpha)\rangle^{\circ} = 0 \Rightarrow \langle V, N\circ\alpha\rangle = \text{sabit}.$$

$$V(t_0) = V(\alpha(t_0)) \Rightarrow \langle V, N\circ\alpha\rangle|_{t_0} = \langle V(t_0), N(\alpha(t_0))\rangle = 0$$

$\forall t \in I$ için, $\langle V, N\circ\alpha\rangle = 0 \Rightarrow \langle V, N\rangle = 0 \Rightarrow V \in \chi(M)$

$\Rightarrow V(t) \in T_M(\alpha(t))$ dir. //

Şekil (Shape) Operatörü

Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n deki Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için, $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya Weingarten Dönüşümü denir.

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun.

i - $S : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, $X \longmapsto S(X)$ ii - S lineerdir.

İspat i- N, M nin birim normal vektör alanı $\Rightarrow \langle N, N\rangle = 1$

$\Rightarrow \forall X \in \chi(M)$ için, $X[\langle N,N\rangle] = X[1] \Rightarrow X[\langle N,N\rangle] = 0$

$\Rightarrow \langle D_X N, N\rangle + \langle N, D_X N\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle D_X N, N\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle D_X N, N\rangle = 0 \Rightarrow D_X N \perp N$

$N \in \chi(M)^\perp \wedge D_X N \in \chi(M) \Rightarrow S(X) \in \chi(M)$

$\Rightarrow S : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ dir.

ii - $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$S(aX + bY) = D_{aX+bY} N = a D_X N + b D_Y N$$
$$= a S(X) + b S(Y)$$

$\Rightarrow S$, bilineerdir. //

27.4.96/c.tesi

{ N, birim hiperyüzey normali, $X \in \chi(M)$, D Riemann konneksiyonu şekil operatörü, $D_X N = S(X)$ $S : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ lineer. }

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin şekil operatörü simetriktir.

ispat// $\forall X,Y \in \chi(M)$ için, $\langle X,N\rangle = 0 \wedge \langle Y,N\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle X,N\rangle = 0 \Rightarrow Y[\langle X,N\rangle] = Y[0] = 0$

$\Rightarrow \langle D_Y X, N\rangle + \langle X, D_Y N\rangle = 0$ .... (1)

$\Rightarrow \langle Y,N\rangle = 0 \Rightarrow X[\langle Y,N\rangle] = X[0] = 0$

$\Rightarrow \langle D_X Y, N\rangle + \langle Y, D_X N\rangle = 0$ .... (2)

Taraf tarafa çıkararak, (2 den 1'i çıkararak)

$\Rightarrow \langle D_X Y, N\rangle - \langle D_Y X, N\rangle + \langle Y, D_X N\rangle - \langle X, D_Y N\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle D_X Y - D_Y X, N\rangle + \langle Y, D_X N\rangle - \langle X, D_Y N\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle [X,Y], N\rangle + \langle D_X N, Y\rangle - \langle X, D_Y N\rangle = 0$

Halbuki $[X,Y] \in \chi(M)$ olduğundan,

$\Rightarrow \langle [X,Y], N\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle S(X), Y\rangle = \langle X, S(Y)\rangle$

$\Rightarrow S$ dönüşümü simetriktir. //

Sonuç: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerindeki şekil operatörü S ise $\chi(M)$ deki herhangi bir baza göre S'nin matrisi simetriktir.

Tanım: (Gauss Dönüşümü):

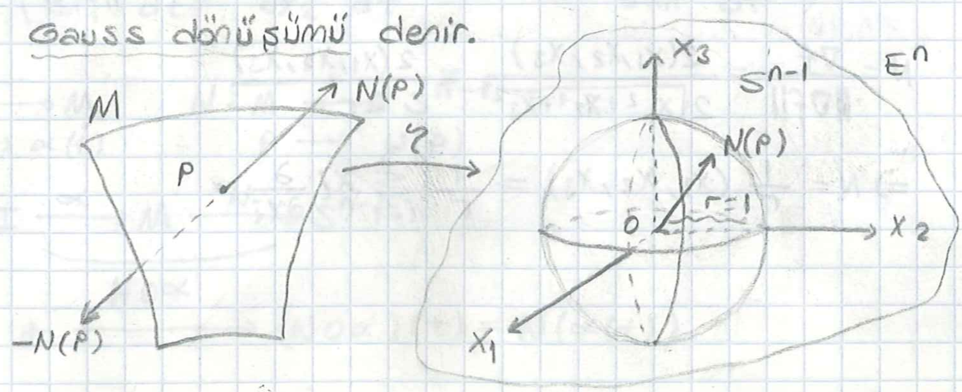
E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı N olsun.

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow S^{n-1} \subset E^n \\ P &\longrightarrow \eta(P) = N(P) = \vec{N}_P = (P, \vec{N}) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P \end{aligned}$$

{ S^{n-1}, E^n deki birim küredir. }

dönüşümüne Gauss dönüşümü denir.

$\|N_P\| = 1$ dir.



Teorem: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerindeki Weingarten dönüşümü (şekil operatörü) S olsun. S, M'nin Gauss dönüşümünün jakobien dönüşümüdür.

İspat// $\alpha: I \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ eğrisi verilsin. $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} = X(\alpha(t)) \in T_M(\alpha(t))$ olmak üzere bir $X \in \chi(M)$ verilsin. $\alpha(t) = p \in M$ alalım.

$$\eta_*: T_M(p) \longrightarrow T_{S^{n-1}}(N(p))$$

dönüşümünün S ile aynı olduğunu ispatlayacağız.

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \eta = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

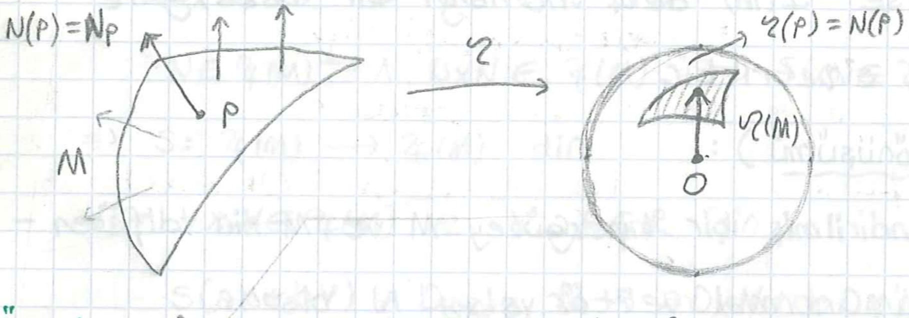
$$\eta_*|_p(X_p) = X_p(\eta) = \sum_{i=1}^{n} X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = D_{X_p} N$$

$$\Rightarrow \eta_*|_p(X_p) = D_{X_p} N = S(X_p) \Rightarrow \eta_* = S$$

Tanım: Gauss dönüşümünün resmi olan

$$\eta(M) = \{X : X \in S^{n-1} \wedge X = N(P) \wedge P \in M\}$$

kümesine yönlendirilmiş M hiperyüzeyinin küresel resmi (Gauss tarzında küresel resmi) denir.



Örnek// E^3 Euclid uzayında $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ denklemiyle verilen M küre yüzeyinin şekil operatörünü ve Gauss dönüşümünü bulun.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0 \qquad N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{2(x_1, x_2, x_3)}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{2(x_1, x_2, x_3)}{2r}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{r}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\forall X_p \in \chi(M)$ için, $S(X_p) = D_{X_p} N = D_{X_p}\left[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} X_p[x_i]\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$$

$X_p[x_i] = \langle \nabla x_i|_p , X_p \rangle$

$$\nabla x_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}, \frac{\partial x_i}{\partial x_2}, \frac{\partial x_i}{\partial x_3}\right) = \begin{cases} (1,0,0), & i=1 \\ (0,1,0), & i=2 \\ (0,0,1), & i=3 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{r}\left(X_p[x_1], X_p[x_2], X_p[x_3]\right)$$

$X_p = (v_1, v_2, v_3)$

$\Rightarrow X_p[x_i] = \frac{1}{r}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{r} X_p$

$\Rightarrow S(X_p) = \frac{1}{r} X_p \Rightarrow \underline{S = \frac{1}{r} I}$ (I = birim dönüşüm)

Hatırlatma: 4.5.96 / C.tesi

M, E^n de bir hiperyüzey, $\alpha: I \longrightarrow E^n$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ bir eğri ; N de M nin birim normal vektör alanı olsun.

$\vec{v} = \vec{\alpha}'(t)$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ ise

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)$$

$S(\vec{v}) = D_{\vec{v}} N$ $\qquad N = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ise

$S(\vec{v}) = D_{\vec{v}} N = (\vec{v}[a_1], \vec{v}[a_2], \dots, \vec{v}[a_n])$

$\vec{v}[a_1] = \langle \vec{v}, \nabla a_1 \rangle$ $\Big\}$ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (M deki) X koordinat sistemine göre,

$a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\nabla a_1 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial a_1}{\partial x_n}\right)$ $\qquad \vec{v} = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$

$$\vec{v}[a_1] = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n}\frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

$\alpha: I \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ $\qquad N: M \longrightarrow S^{n-1}$, $P \longrightarrow N(P)$

$$\underbrace{I \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{N}}_{N\circ\alpha} S^{n-1}$$

$$t \longrightarrow (N\circ\alpha)(t) = N(\alpha(t))$$

$$N(\alpha(t)) = \left(a_1(\alpha(t)), a_2(\alpha(t)), \dots, a_n(\alpha(t))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = N' = \left(\frac{da_1(\alpha(t))}{dt}, \frac{da_2(\alpha(t))}{dt}, \dots, \frac{da_n(\alpha(t))}{dt}\right)$$

$$\frac{da_1(\alpha(t))}{dt} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n}\frac{d\alpha_n}{dx_n}$$

$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1 = x_1(t) = \alpha_2(t) \dots \\ x_n = x_n(t) = \alpha_n(t) \end{array} \right.$

$\Rightarrow \frac{da_1}{dt} = \vec{v}[a_1]$ dir. Benzer şekilde

$$\frac{da_i}{dt} = \vec{v}[a_i] \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olur. (yüzey normalinin eğrinin parametresine göre türevi, eğrinin hız vektörünün bileşenlerine göre türevine eşittir.)

$$S(\vec{v}) = S(\vec{\alpha}'(t)) = D_{\vec{v}}\vec{N} = D_{\alpha'(t)}\vec{N}$$

$$= \left(\alpha'(t)[a_1], \dots, \alpha'(t)[a_n]\right)$$

$$= \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \dots, \frac{da_n}{dt}\right)_{\alpha(t)}$$

$$= \left.\frac{dN}{dt}\right|_{\alpha(t)}$$ {yüzey normalinin türevidir.}

$$\Rightarrow S(\alpha'(t)) = S\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right) = \left.\frac{dN}{dt}\right|_{\alpha(t)}$$

Hipergüzeyin Parametre Eğrileri

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) = X : X \in E^n \wedge f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\} \quad \nabla f \neq 0$$

kümesi bir hiperyüzey idi.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$ olsun. Eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 'dan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ çözülürse,

{$x_1, x_2, \dots, x_n$ ifalerinden birisi diğer $(n-1)$ tanesi cinsinden veya $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lerin herbirisi $(n-1)$ tane bilinmeyen cinsinden çözülür.}

$x_1 = x_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$,

$x_2 = x_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$

- - - - - - - - - - - - - -

$x_n = x_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ (u_i ler keyfi)

$$\Rightarrow X = X(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \left(x_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})\right)$$

buna hiperyüzeyin vektörel denklemi denir.

Örnek // E^3 de, $x^2+y^2=R^2$ $\{(x,y,z) : x^2+y^2=R^2\}$ = silindir,

silindirik koord. dön.

$$\left.\begin{array}{l} x=R\cos u \\ y=R\sin u \\ z=v \end{array}\right\} \Rightarrow X(u,v)=(R\cos u, R\sin u, v)$$

Örnek // $x^2+y^2+z^2=a^2$ (E^3 de) küre (2-küre) veya S^2 küre,

$\{(x,y,z)=X : X\in E^3 \wedge x^2+y^2+z^2=a^2\}$

$$X(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

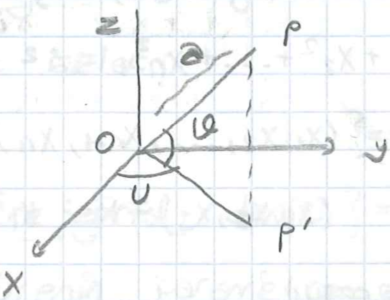
i- $x=u$, $y=v \Rightarrow z=\mp\sqrt{a^2-u^2-v^2}$

$$X(u,v)=(u, v, \mp\sqrt{a^2-u^2-v^2})$$

fakat bunu göstermek yetersizdir. karekök olduğundan.

ii- küresel koord. dön.

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos u\cos v \\ y=a\sin u\cos v \\ z=a\sin v \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$X=X(u,v)=(a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, a\sin v)$$

S^2 küre üzerindeki noktaların vektörel denklemidir.

Örnek // E^3 de $Ax+By+Cz+D=0$, $C\neq 0$ düzlem.

$$x=u,\ y=v \Rightarrow z=-\frac{D}{C}-\frac{A}{C}u-\frac{B}{C}v$$

$$X(u,v)=\left(u, v, -\frac{D}{C}-\frac{A}{C}u-\frac{B}{C}v\right)$$

Örnek // E^n de bir hiperdüzlem $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ veya

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b \ \wedge \ a_n\neq 0$$

$$x_1=u_1,\ x_2=u_2,\dots,x_{n-1}=u_{n-1} \wedge x_n=\frac{b}{a_n}-\frac{a_1}{a_n}u_1-\frac{a_2}{a_n}u_2-\dots-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\Rightarrow X(u_1,u_2,\dots,u_n)=\left(u_1,u_2,\dots,u_{n-1}, \frac{b}{a_n}-\frac{a_1}{a_n}u_1-\frac{a_2}{a_n}u_2-\dots-\frac{a_{n-1}}{a_n}u_{n-1}\right)$$

Örnek // Hiperküre E^n de,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=a^2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^2$$

$x_1 = a\cos u_1 . \cos u_2 \dots \cos u_{n-1} = a\prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i$

$x_2 = a\sin u_1 \cos u_2 \dots \cos u_{n-1} = a\sin u_1 \prod_{i=2}^{n-1} \cos u_i$

$x_3 = a\sin u_2 \cos u_3 \dots \cos u_{n-1} = a\sin u_2 \prod_{i=3}^{n-1} \cos u_i$

$x_4 = a\sin u_3 \cos u_4 \dots \cos u_{n-1} = a\sin u_3 \prod_{i=4}^{n-1} \cos u_i$

$x_{n-1} = a\sin u_{n-2} \cos u_{n-1}$

$x_n = a\sin u_{n-1}$

$$X = X(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = a\left(\prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i , \sin u_1 \prod_{i=2}^{n-1} \cos u_i , \dots , \sin u_{n-1}\right)$$

hiperkürenin en uygun vektörel gösterimidir.

Örnek // E^n de hipersilindir, $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = a^2$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = a^2$

hipersilindir $= \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = X : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = a^2 \} \subset E^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{silindir} = \{ (x_1, x_2, x_3) = X : x_1^2 + x_2^2 = a^2 \} \subset E^3 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 = a\cos u_1 \\ x_2 = a\sin u_1 \\ x_3 = u_2 \end{array} \right\} X(u_1, u_2) = (a\cos u_1, a\sin u_1, u_2) \end{array} \right\}$$

$x_1 = a\cos u_1 \cos u_2 \dots \cos u_{n-2} = a\prod_{i=1}^{n-2} \cos u_i$

$x_2 = a\sin u_1 \cos u_2 \dots \cos u_{n-2} = a\sin u_1 \prod_{i=2}^{n-2} \cos u_i$

$x_3 = a\sin u_2 \cos u_3 \dots \cos u_{n-2} = a\sin u_2 \prod_{i=2}^{n-2} \cos u_i$

$x_{n-2} = a\sin u_{n-3} \cos u_{n-2}$

$x_{n-1} = a\sin u_{n-2}$

$x_n = u_{n-1}$

$$X = X(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \left(a\prod_{i=1}^{n-2} \cos u_i , a\sin u_1 \prod_{i=2}^{n-2} \cos u_i , \dots , u_{n-1}\right)$$

hipersilindirin parametrik denklemidir.

Hiperyüzey Üzerinde Eğri : $X = X(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ parametrik denklemi verildiğinde, hiperyüzey üzerindeki bir eğriyi elde etmek için,

$u_1 = u_1(t),\ u_2 = u_2(t), \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}(t)$

almak yeterlidir.

Parametre Eğrileri (Parametre Çizgileri):

Hiperyüzeyin $X = X(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ denkleminde u_1 hariç, diğer parametreler sabit alınırsa, $u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-1} = \text{sabit}$

$\Rightarrow X(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = Y(u_1)$

eğrisine u_1-parametre eğrisi (u_1-çizgi) denir. Benzer şekilde, u_2 hariç, $u_3 = u_4 = \ldots = u_{n-1} = \text{sabit}$ alınırsa

$\Rightarrow X(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = Z(u_2)$

eğrisine hiperyüzeyin u_2-parametre eğrisi (u_2-çizgi) denir.

u_{n-1} hariç, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ sabit iseler

$\Rightarrow X(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = S(u_{n-1})$

eğrisine hiperyüzeyin u_{n-1}-parametre eğrisi denir.

Örnek 1) $x^2+y^2+z^2=a^2$ E^3 deki kürenin parametre eğrilerini belirtin.

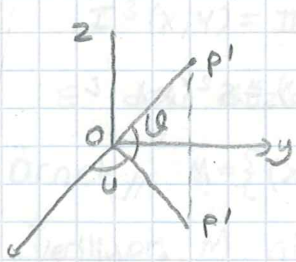
$X(u, \vartheta) = (a\cos u \cos\vartheta,\ a\sin u\cos\vartheta,\ a\sin\vartheta)$ $(\vartheta = \text{sabit.})$: minel

u-parametre eğrileri, $\vartheta = \text{sabit}$

$\Rightarrow a\cos\vartheta = b,\ a\sin\vartheta = c$

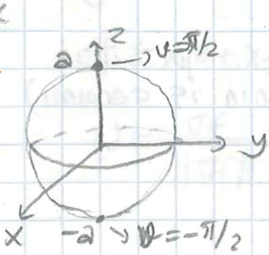
$Y(u) = (b\cos u,\ b\sin u,\ c) = (x, y, z)$

$x^2+y^2=b^2,\ z=c$ çemberdir. $-a \leq z \leq a$



$\vartheta = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{array}$

$\vartheta = \pi/2 \Rightarrow Y(u) = (0, 0, a)$



$\vartheta = \pi/4 \Rightarrow Y(u) = \left(\frac{a}{\sqrt2}\cos u, \frac{a}{\sqrt2}\sin u, \frac{a}{\sqrt2}\right)$

$x^2+y^2 = \frac{a^2}{2},\ z = \frac{a}{\sqrt2}$

$\vartheta = \pi \Rightarrow Y(u) = (-a\cos u, -a\sin u, 0)$

$x^2+y^2=a^2 \wedge z=0$

$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \upsilon \leq 2\pi$

kürenin parametre eğrileri paralel çemberlerdir. //

υ = sabit alınarak, ϑ parametre eğrileri,

$\upsilon = 0 \Rightarrow z_1(\vartheta) = (a\cos\vartheta, 0, a\sin\vartheta)$

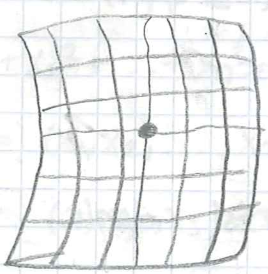
$x^2 + z^2 = a^2 \quad , \quad y = 0$

$\upsilon = \pi/4 \Rightarrow z_2(\vartheta) = (\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, a\sin\vartheta)$

$\upsilon = \pi/2 \Rightarrow z_3(\vartheta) = (0, a\cos\vartheta, a\sin\vartheta)$

$x = 0 \, , \, y^2 + z^2 = a^2$

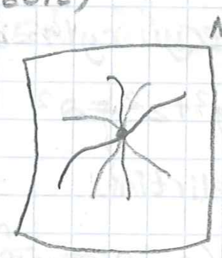
$\upsilon = \pi \Rightarrow z_4(\vartheta) = (-a\cos\vartheta, 0, a\sin\vartheta)$ // $\quad x^2 + z^2 = a^2 \wedge y = 0$



yüzeyin her noktasından bir çift parametre eğrisi geçer.

υ-çizgileri (ϑ = sabit)

M



Bir hiperyüzeyin herbir noktasından $n-1$ tane parametre eğrisi geçer.

Tanım: (Temel Formlar) : E^n in bir M hiperyüzeyi üzerindeki q. temel (esas) form diye ($q = 1, 2, \ldots, n$)

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \longrightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı, I^q fonksiyonuna denir.

$$S^{q-1}(X) = \underbrace{S[S(S(\ldots(S(X)))]}_{q-1 \text{ tane}} \quad , \quad S(S(X)) = S^2(X)$$

M üzerinde 1. temel form:

$$I^1(X, Y) = I(X, Y) = \langle \underbrace{S^0}_{I}(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

$\Rightarrow I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ iç çarpım. (vektör alanlarının iç çarpımı)
(metrik tensör.)
(Riemann metriği)

$q=2 \Rightarrow I^2(X,Y) = \langle S^1(X), Y\rangle = \langle S(X), Y\rangle$

$q=3 \Rightarrow I^3(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle$

---

q için, $I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y\rangle$

E^3 de hiperyüzey (yüzey) üzerindeki temel formlar.

- 1. temel form, $I^1(X,Y) = I(X,Y) = \langle X,Y\rangle$
- 2. temel form, $I^2(X,Y) = II(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle$
- 3. temel form, $I^3(X,Y) = III(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle$

Örnek// $M = \{(x_1,x_2,x_3) : 3x_1+4x_2+5x_3=1\} \subset E^3$ verilsin. Temel formları bulalım.

$I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y\rangle \quad , X,Y \in \chi(M)$

$S(X) = D_X N \qquad f=3x_1+4x_2+5x_3-1=0$

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(3,4,5)}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{(3,4,5)}{5\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{5}\sqrt{2}, \frac{4}{5}\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N = \left(X\left[\tfrac{3}{5}\sqrt{2}\right], X\left[\tfrac{4}{5}\sqrt{2}\right], X\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

$$= \Big(\underbrace{\langle X, \overbrace{\nabla \tfrac{3}{5}\sqrt{2}}^{0}\rangle}_{0}, 0, 0\Big) = (0,0,0) = 0$$

$S(X) = 0 \Rightarrow S^2(X) = S(S(X)) = S(0) = 0$

$\forall X,Y \in \chi(M)$ için, $\quad I(X,Y) = \langle X,Y\rangle$

$I^2(X,Y) = II(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle = 0 \Rightarrow II = 0$

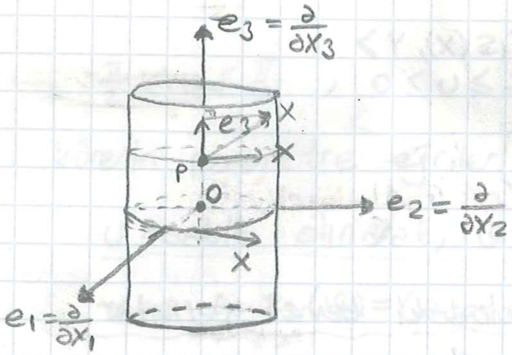
$I^3(X,Y) = III(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle = 0 \Rightarrow III = 0$

E^3 deki düzlemde 2. ve 3. temel formlar sıfırdır.

Örnek// $M = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2+x_2^2 = 1\} \subset E^3$ silindir yüzeyi veriliyor. M nin birim normal vektör alanı;

$f = x_1^2+x_2^2 - 1 = 0 \qquad \nabla f = (2x_1, 2x_2, 0) \quad \|\nabla f\| = 2$

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (x_1,x_2,0) = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$$



a) $X \in \chi(M)$ vektör alanı

$X = (0,0,1) = e_3$ olsun.

$S(X) = S(e_3) = D_{e_3} N$

$= (e_3[x_1], e_3[x_2], e_3[0])$

$e_3[x_1] = \langle \vec{e_3}, \vec{\nabla} x_1 \rangle = \langle (0,0,1), (1,0,0) \rangle = 0$

$e_3[x_2] = \langle \vec{e_3}, \vec{\nabla} x_2 \rangle = \langle (0,0,1), (0,1,0) \rangle = 0$

$e_3[0] = \langle \vec{e_3}, \vec{\nabla} x_3 \rangle = \langle (0,0,1), (0,0,0) \rangle = 0 \quad \Rightarrow S(e_3) = S(X) = 0$

$\Rightarrow S^2(e_3) = S^2(X) = 0$

b) Eğer $\langle X, e_3 \rangle = 0$ ise ($X \perp e_3$ ise)

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ X de bu çemberin teğeti,

$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad x_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$

$\Rightarrow X = \frac{dx}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0) = (-x_2, x_1, 0)$ olsun.

$S(X) = D_X N = (X[x_1], X[x_2], X[0])$

$= (\langle (-x_2, x_1, 0), \underset{\nabla x_2}{(1\,0\,0)} \rangle, x_1, 0)$

$= (-x_2, x_1, 0) = X$

$S^2(X) = S(S(X)) = S(X) = X$

c) X herhangi bir doğrultu ise,

$X = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) + (0,0,x_3) = (x_1, x_2, 0) + x_3(0,0,1)$

$X = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) + x_3 \vec{e_3}$

$S(X) = S[(x_1, x_2, x_3)] = S[(x_1, x_2, x_3) + x_3 e_3] = S[(x_1, x_2, 0)] + S(x_3 e_3)$

$= S(x_1, x_2, 0) \underset{\text{lineerlik}}{+} x_3 S(e_3)$

$\langle \underbrace{(x_1, x_2, 0)}_{X}, e_3 \rangle = 0 \quad (X \perp e_3) \qquad S(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$

$S(e_3) = 0$

$\Rightarrow S(X) = S(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$

$\Rightarrow S(X) \perp e_3$

Ödev : Silindir üzerindeki temel formları bulun.

11.5.96/C.tesi

1. esas form :

a) X veya Y den birisi $e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$ 'e paralel değilse,

$I(X,Y) = \langle X,Y \rangle$

b) X veya Y den birisi e_3'e paralel ise,

$I(X,Y) = \langle e_3, Y \rangle = \langle X, e_3 \rangle$

2. temel form :

a) $II(X,Y) = \langle S(X),Y \rangle = \langle X,Y \rangle = I(X,Y)$

b) $II(X,Y) = \langle S(X),Y \rangle = 0$

$\left\{ \langle S(X),Y \rangle \overset{\text{simetri}}{=} \langle X,S(Y) \rangle \Rightarrow \langle S^2(X),Y \rangle = \langle S(S(X)),Y \rangle = \langle S(X),S(Y) \rangle \right.$

3. temel form :

a) $III(X,Y) = \langle S^2(X),Y \rangle = \langle S(X),S(Y) \rangle = I(X,Y)$

b) $III(X,Y) = 0$

E^3 de Herhangi Bir Yüzey İçin S'nin Matrisinin Hesabı

$X = X(u,v)$ parametrik olarak yazılsın.

$\forall V_1, V_2 \in \chi(M)$ için $\{V_1, V_2\}$ lineer bağımsız olsun.

$\{V_1,V_2\}$ bir bazdır. $S(V_1) \in \chi(M) \Rightarrow S(V_1) = aV_1 + bV_2$

$S(V_2) \in \chi(M) \Rightarrow S(V_2) = cV_1 + dV_2$

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$ $\left. \begin{array}{l} V_1 = X_u \\ V_2 = X_v \end{array} \right\}$ olsun.

$S(V_1) = S(X_u) = D_{X_u} N = \frac{\partial N}{\partial u}$

$S(V_2) = S(X_v) = D_{X_v} N = \frac{\partial N}{\partial v}$

$N = \frac{V_1 \wedge V_2}{\|V_1 \wedge V_2\|} = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$

$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \langle X_u \wedge X_v, X_u \wedge X_v \rangle = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2$

$\langle X_u, X_u \rangle = \|X_u\|^2 = E$, $\langle X_v, X_v \rangle = \|X_v\|^2 = G$, $\langle X_u, X_v \rangle = F$

$N = \frac{X_u \wedge X_v}{W}$ $\Rightarrow \|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2$

$\Rightarrow \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG-F^2} = W$ olsun.

$$\frac{\partial N}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X_u\wedge X_v}{W}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left[(X_u\wedge X_v)W^{-1}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[(X_u\wedge X_v)\left(\langle X_u,X_u\rangle\langle X_v,X_v\rangle-\langle X_u,X_v\rangle^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$=(X_{uu}\wedge X_v+X_u\wedge X_{uv})W^{-1}+$$

$$+(X_u\wedge X_v)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Big[2\langle X_{uu},X_u\rangle\langle X_v,X_v\rangle+\langle X_u,X_u\rangle\langle X_{vv},X_v\rangle-$$

$$-2\langle X_u,X_v\rangle\left(\langle X_{uu},X_v\rangle+\langle X_u,X_{uv}\rangle\right)\Big]\left(\langle X_u,X_u\rangle\langle X_v,X_v\rangle-\langle X_u,X_v\rangle\right)^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial u}=\frac{(X_{uu}\wedge X_v)+(X_u\wedge X_{uv})}{W}-(X_u\wedge X_v)\frac{\langle X_{uu},X_u\rangle G+E\langle X_{uu},X_v\rangle-F(\ldots}{W^3}$$

$$\frac{-F(\langle X_{uu},X_v\rangle+\langle X_u,X_{uv}\rangle)}{W^3}$$

E^3 de $\{X_u,X_v,N\}$ bir bazdır.

X_u çarpalım / $X_{uu}=\lambda_1X_u+\lambda_2X_v+\lambda_3N\Rightarrow\langle X_{uu},X_u\rangle=\lambda_1E+\lambda_2F$

$$\left\{\langle X_u,N\rangle=\left\langle X_u,\frac{X_u\wedge X_v}{\|X_u\wedge X_v\|}\right\rangle=0\right.$$

karma çarpım determinant olur. X_u lar aynı olduğundan sıfırdır.

X_v / $X_{uu}=\lambda_1X_u+\lambda_2X_v+\lambda_3N\Rightarrow\langle X_{uu},X_v\rangle=\lambda_1F+\lambda_2G$

$$\lambda_1=\frac{\langle X_{uu},X_u\rangle G-\langle X_{uu},X_v\rangle F}{W^2}$$

$$\lambda_2=\frac{\langle X_{uu},X_v\rangle E-\langle X_{uu},X_u\rangle F}{W^2}$$

N / $X_{uu}=\lambda_1X_u+\lambda_2X_v+\lambda_3N\Rightarrow\langle X_{uu},N\rangle=\lambda_3=\left\langle X_{uu},\frac{X_u\wedge X_v}{W}\right\rangle$

$$\lambda_3=\frac{\det\{X_u,X_v,N\}}{W}$$

$X_{uv}=\mu_1X_u+\mu_2X_v+\mu_3N$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l}\langle X_{uv},X_u\rangle=\mu_1E+\mu_2F\\ \mu_1F+\mu_2G\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mu_1=\frac{\langle X_{uv},X_u\rangle G-\langle X_{uv},X_v\rangle F}{W^2}$$

$$\mu_2=\frac{\langle X_{uv},X_v\rangle E-\langle X_{uv},X_u\rangle F}{W^2}$$

$\langle X_{uv},N\rangle=\mu_3\Rightarrow$

$$\mu_3=\frac{\det\{X_{uv},X_u,X_v\}}{W}$$

$$x_{uu} \wedge x_v = (\lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v + \lambda_3 N) \wedge x_v$$
$$= \lambda_1 x_u \wedge x_v + \lambda_3 N \wedge x_v$$

$$N \wedge x_v = \frac{x_u \wedge x_v}{w} \wedge x_v = \frac{1}{w} (x_u \wedge x_v) \wedge x_v$$
$$= \frac{1}{w} \left(\langle x_u, x_v \rangle x_v - \langle x_v, x_v \rangle x_u \right.$$
$$\Rightarrow \quad N \wedge x_v = \frac{1}{w} (F x_v - G x_u)$$

$$x_u \wedge x_{uv} = x_u \wedge (\mu_1 x_u + \mu_2 x_v + \mu_3 N)$$
$$= \mu_2 x_u \wedge x_v + \mu_3 x_u \wedge N$$
$$= \mu_2 x_u \wedge x_v + \mu_3 \frac{1}{w} (F x_u - G x_v)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{\langle x_{uu}, \cancel{x_v} \rangle G - \langle x_{uu}, \cancel{x_v} \rangle F}{w^3} (x_u \wedge x_v) + \frac{\det[x_{uu}, x_u, x_v](F x_v - G x_u)}{w^3}$$

$$+ \frac{\langle x_{uv}, x_v \rangle E - \langle x_{uv}, \cancel{x_u} \rangle F}{w^3} (x_u \wedge x_v) + \frac{\det[x_{uv}, x_u, x_v][F x_u - E x_v]}{w^3}$$

$$- \frac{\langle \cancel{x_{uu}}, x_u \rangle G + \langle x_{uu}, x_v \rangle E - F(\langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_{uv}, x_u \rangle)}{w^3} (x_u \wedge x_v)$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{x_u}{w^3} \left[\frac{-\det[x_{uu}, x_u, x_v] + G + \det[x_{uv}, x_u, x_v] F}{} \right] +$$
$$+ \frac{x_v}{w^3} \left[\det[x_{uu}, x_u, x_v] F - \det[x_{uv}, x_u, x_v] E \right] = S(x_u)$$

$$S(V_2) = S(x_v) = D_{x_v} N = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} \left((x_u \wedge x_v) w^{-1} \right)$$
$$= (x_{uv} \wedge x_v + x_u \wedge x_{vv}) w^{-1} (x_u \wedge x_v) \ldots\ldots$$

Benzer şekilde, $\qquad w = (\langle x_u, x_u \rangle \langle x_v, x_v \rangle + \langle x_u, x_v \rangle^2)^{1/2}$

$$x_{uv} = \mu_1 x_u + \mu_2 x_v + \mu_3 N \qquad x_{vv} = \nu_1 x_u + \nu_2 x_v + \nu_3 N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial v} = S(V_2) = \frac{x_u}{w^3} \left[-\det[x_{uv}, x_u, x_v] G + \det[x_{uv}, x_u, x_v] F \right] +$$
$$+ \frac{x_v}{w^3} \left[-\det[x_{uv}, x_u, x_v] E + \det[x_{uv}, x_u, x_v] F \right]$$

$$S \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{w^3} \begin{bmatrix} -\det[x_{uu}, x_u, x_v] G + \det[x_{uv}, x_u, x_v] F & \det[x_{uu}, x_u, x_v] F - \det[\quad] E \\ -\det[x_{uu}, x_u, x_v] G + \det[x_{uv}, x_u, x_v] F & -\det[x_{uu}, x_u, x_v] E - \det[\quad] F \end{bmatrix}$$

Özel hâl: $F=\langle X_u, X_v\rangle = 0 \wedge \det[X_{uv}, X_u, X_v]=0$ olsun. (parametre eğrileri dik olsun.)

$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{\det[X_{uu},X_u,X_v]}{\|X_u\|^3\,\|X_v\|} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\det[X_{vv},X_u,X_v]}{\|X_u\|\,\|X_v\|^3}\end{bmatrix}$$

$$a=a_{11}=\frac{-1}{W^3}\det[X_{uu},X_v,X_v]\,G$$

$$W=\sqrt{EG-\underbrace{F^2}_{0}}=\sqrt{EG}=\sqrt{\|X_u\|^2\|X_v\|^2}=\|X_u\|.\|X_v\|$$

$$\Rightarrow a=a_{11}=-\frac{1}{\|X_u\|^3\|X_v\|^3}\det[X_{uu},X_u,X_v]\,\|X_v\|^2=-\frac{\det[X_{uu},X_u,X_v]}{\|X_u\|^3\,\|X_v\|}$$

$$d=a_{22}=-\frac{1}{W^3}\det[X_{uv},X_u,X_v]\,E=-\frac{1}{\|X_u\|^3\,\|X_v\|^3}\det[X_{vv},X_u,X_v]\,\|X_u\|^2$$

Özel Hâl: $F=\langle X_u, X_v\rangle = 0$ olsun.

$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{\det[X_{uu},X_u,X_v]\,G}{W^3} & -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]\,E}{W^3} \\ -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]\,G}{W^3} & -\dfrac{\det[X_{vv},X_u,X_v]\,E}{W^3}\end{bmatrix}$$

$$E=\langle X_u,X_u\rangle=\|X_u\|^2 \qquad G=\langle X_v,X_v\rangle=\|X_v\|^2$$

$$W^3=\left(\sqrt{EG-0}\right)^3=\left(\sqrt{\|X_u\|^2\|X_v\|^2}\right)^3=\|X_u\|^3\|X_v\|^3$$

$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{\det[X_{uu},X_u,X_v]}{\|X_u\|^3\,\|X_v\|} & -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]}{\|X_u\|^2\,\|X_v\|^2} \\ -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]}{\|X_u\|^2\,\|X_v\|^2} & -\dfrac{\det[X_{vv},X_u,X_v]}{\|X_u\|\,\|X_v\|^3}\end{bmatrix}$$

Uygulama

1- $X: E^2 \longrightarrow E^3$
$(u,v)\longrightarrow (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ au)$ biçiminde verilen M yüzeyinin S şekil operatörünü bulun.

2- $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le 3,\ \sum_{i=1}^{2} x_i^2=1\}$ silindirinin şekil operatörünü bulun.

3- $X: E^2\longrightarrow E^3$
$(u,v)\longrightarrow X(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$ ile tanımlanan M yüzeyinin şekil operatörünü hesaplayın.

4 – $M=\{(x_1,x_2,x_3)\in E^3 \mid x_3=x_1^2+x_2^2\}$ yüzeyi için S şekil operatörünü hesaplayın.

Çözümler

1 –
$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{\det[X_{uu},X_u,X_v]}{\|X_u\|^3\|X_v\|} & -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]}{\|X_u\|^2.\|X_v\|^2} \\ -\dfrac{\det[X_{uv},X_u,X_v]}{\|X_u\|^2\|X_v\|^2} & -\dfrac{\det[X_{vv},X_u,X_v]}{\|X_u\|.\|X_v\|^3} \end{bmatrix}$$

$X(u,v)=(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ au)$

$X_u=(-\sin u\cos v,\ -\sin u\sin v,\ a)$

$X_v=(-\cos u\sin v,\ \cos u\cos v,\ 0)$

$X_{uu}=(-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ 0)$

$X_{uv}=(\sin u\sin v,\ -\sin u\cos v,\ 0)$

$X_{vv}=(-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ 0)$

$F=\langle X_u,X_v\rangle=\sin u\cos v\cos u\sin v-\sin u\sin v\cos u\cos v=0$

$$\|X_u\|=\sqrt{\sin^2u\cos^2v+\sin^2u\sin^2v+a^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2u\underbrace{(\cos^2v+\sin^2v)}_{1}+a^2}=\sqrt{\sin^2u+a^2}$$
$$\|X_v\|=\sqrt{\cos^2u\sin^2v+\cos^2u\cos^2v}$$
$$=\sqrt{\cos^2u(\sin^2v+\cos^2v)}=\sqrt{\cos^2u}=\cos u$$

$$\det(X_{uu},X_u,X_v)=\begin{vmatrix} -\cos u\cos v & -\cos u\sin v & 0 \\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & a \\ -\cos u\sin v & \cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$=-a(-\cos^2u\cos^2v-\cos^2u\sin^2v)$$
$$=a\cos^2u$$

$$\det(X_{vv},X_u,X_v)=\begin{vmatrix} -\cos u\cos v & -\cos u\sin v & 0 \\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & a \\ -\cos u\sin v & \cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}=a\cos^2u$$

$$\det(X_{uu}, X_u, X_v) = \det(X_{vu}, X_u, X_v) = 0 \text{ dır.}$$

$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{\det[X_{uu}, X_u, X_v]}{\|X_u\|^3 \|X_v\|} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\det[X_{vv}, X_u, X_v]}{\|X_u\| \cdot \|X_v\|^3} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{a\cos^2 u}{(\sin^2 u + a^2)^{3/2}(\cos u)} & 0 \\ 0 & \dfrac{a\cos^2 u}{\sqrt{\sin^2 u + a^2}(\cos^3 u)} \end{bmatrix}$$

2- $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\quad x_1 = \cos u$, $x_2 = \sin u$, $x_3 = v$

$$X(u,v) = (x_1, x_2, x_3) = (\cos u, \sin u, v) \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} //$$

3-

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a}{u^2+a^2} \\ \dfrac{a}{u^2+a^2} & 0 \end{bmatrix} //$$

4- $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

$x_3 = u^2$, $x_2 = u\cos v$, $x_1 = u\sin v$

$$X(u,v) = (x_1, x_2, x_3) = (u\sin v, u\cos v, u^2)$$

$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{(1+4u^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2}} \end{bmatrix}$$

18.5.96 / C.tesi

Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun.

i- $\forall P \in M$ noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik (eigen = öz) değerlerine M nin bu noktadaki aslî eğrilikleri denir.

ii- Aslî eğriliklere karşılık gelen karakteristik (öz = eigen) vektörlerin, belirttiği doğrultulara M nin bu P noktasındaki aslî doğrultuları (aslî eğrilik doğrultuları) denir.

Hatırlatma :

$L : V \xrightarrow{\text{lineer}} V$, $[A]_{n\times n}$ (Lineer Cebir'den)

$x \longrightarrow L(x) = AX$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X$

1°) Eğer $AX = \lambda X$ olan $\lambda \in \mathbb{R}$ ye A nın özdeğerleri denir.

$\lambda X - AX = 0 \Rightarrow (\lambda I_n - A)X = 0$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

$\downarrow$

A nın karakteristik polinomu.

2°) $P_A(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ A nın özdeğerleri

3°) $AX = \lambda X$

$\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda_1 x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda_1 x_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda_1 x_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_1)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda_1)x_n = 0 \end{array}$$

n bilinmeyen $n-1$ denklem 1 parametreye bağlı çözüm verdir.

sisteminin çözüm vektörlerine,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ A'nın özvektörleri denir.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n-tane farklı karakteristik değeri olabilir.

S şekil operatörü olsun.

$S : T_M(P) \xrightarrow{\text{lineer}} T_M(P)$ $[S]_{(n-1)\times(n-1)}$ dir.

$V \longrightarrow S(V)$

$\Rightarrow$ Şekil operatörünün $n-1$ tane karakteristik değeri ve bunlara karşılık $n-1$ tane karakteristik vektör bulunabilir.

Teorem: S nin karakteristik polinomu $T_M(P)$ deki baz değişimlerinden bağımsızdır.

İspat// $T_M(P)$ de iki baz ϕ (Fi) ve ψ (Psi) olsunlar.

$\phi = \{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$, $\psi = \{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}$

(hiperyüzeyin, tanjant uzayının boyutu $n-1$ dir.)

$S(P)$'nin bu bazlara göre matrisleri S_ϕ ve S_ψ olsunlar.

$\forall X \in T_M(P) \Rightarrow S_\phi(X) = S_\phi X$, $S_\psi(X) = S_\psi X$

Lineer cebir, baz değişimi teoreminden,

$S_\psi = Q S_\phi Q^{-1}$ olan Q regüler matrisi vardır. $[[Q]_{n-1 \times n-1}]$

ψ bazına göre karakteristik polinomu $P_{S_\psi}(\lambda)$ ile

ϕ " " " " $P_{S_\phi}(\lambda)$ ile gösterelim.

ϕ ve ψ bazlarına göre bunların eşit olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
P_{S_\psi}(\lambda) &= \det(\lambda I_{n-1} - S_\psi) = \det(\lambda I_{n-1} - Q S_\phi Q^{-1}) \\
&= \det[\lambda Q Q^{-1} - Q S_\phi Q^{-1}] \\
&= \det[Q \lambda Q^{-1} - Q S_\phi Q^{-1}] \\
&= \det[Q(\lambda I_{n-1} - S_\phi) Q^{-1}] \qquad \{\det AB \overset{?}{=} \det A . \det B\} \\
&= \det Q . \det(\lambda I_{n-1} - S_\phi) . \det Q^{-1} \\
&= P_{S_\phi}(\lambda) \underbrace{\det Q . \det Q^{-1}}_{1} \qquad \left\{\det Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\right.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_{S_\psi}(\lambda) = P_{S_\phi}(\lambda)$ //

Sonuç 1- M nin asli eğrilikleri, $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

2- M nin asli doğrultuları da, $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. X_P ve Y_P bir $P \in M$ noktasındaki, M nin farklı asli eğriliklerine karşılık gelen karakteristik vektörler ise X_P ve Y_P ortogonaldirler.

İspat// X_P ye karşılık gelen asli eğrilik k_1 ise,

$S(X_P) = \lambda_1 X_P$, $\lambda_1 = k_1$ $\Rightarrow S(X_P) = k_1 X_P$ (asli eğrilik tanımı)

ve Y_P'ye karşılık gelen asli eğrilik k_2 ise,

$S(Y_P) = k_2 Y_P$ yazılabilir.

$\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle X_P, S(Y_P) \rangle$ (şekil operatörü simetrik old.)

$\Rightarrow \langle k_1 X_P, Y_P \rangle = \langle X_P, k_2 Y_P \rangle$

$\Rightarrow k_1 \langle X_P, Y_P \rangle = k_2 \langle X_P, Y_P \rangle$

$\Rightarrow (k_2 - k_1) \langle X_P, Y_P \rangle = 0 \Rightarrow k_1 \neq k_2 \wedge \langle X_P, Y_P \rangle = 0$

$\Rightarrow$ iki asli vektör, $X_P \perp Y_P$ olur.

Tanım: (Gauss Eğriliği): VİZE buraya kadar.

E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss Eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de, M nin P noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir.

Teorem: $K(P)$ Gauss eğriliği $T_M(P)$ nin baz seçiminden bağımsızdır.

İspat// ψ ve ϕ, $T_M(P)$ de iki baz olsunlar. $S : T_M(P) \xrightarrow{\text{lineer}} T_M(P)$ dönüşümünün bu bazlara göre matrisleri S_ψ ve S_ϕ olsun. $S_\psi = Q S_\phi Q^{-1}$ olacak şekilde Q regüler matrisi vardır.

$$K_\psi(P) = \det S_\psi(P) = \det(Q S_\phi Q^{-1})$$
$$= \det[Q(S_\phi Q^{-1})] = \det Q \cdot \det(S_\phi Q^{-1})$$
$$= \det Q \det S_\phi \det Q^{-1}$$
$$= K_\phi(P) \underbrace{\det Q \det Q^{-1}}_{1} = K_\phi(P)$$
$$= K(P) \text{ olur.}$$

Bazları yazmaya gerek yok.

Sonuç: K fonksiyonu dolayısıyla $K(P)$ Gauss eğriliği $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır. $K(P)$ yi bulurken $T_M(P)$ nin en uygun bazını seçebiliriz.

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki M'nin aslî eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), \dots, k_{n-1}(P)$ iseler,

$$K(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P) \cdot k_2(P) \cdots k_{n-1}(P)$$

dir.

İspat// $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$'e karşılık gelen karakteristik vektörler, sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ olsunlar. Eğer P noktası özel nokta değilse $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ lerin hepsi farklı alınabilir. $\Rightarrow X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ler ortogonaldir. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ $T_M(P)$ de bir bazdır.

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \longrightarrow X_1 \Rightarrow S(X_1) = k_1 X_1 \\ k_2 \longrightarrow X_2 \Rightarrow S(X_2) = k_2 X_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \Rightarrow S(X_{n-1}) = k_{n-1} X_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow S(X_i) = k_i X_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$S\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$K(P) = \det S(P) = k_1(P) k_2(P) \cdots k_{n-1}(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

Hangi baza göre hesaplanırsa da, şekil operatörünün değeri bu determinantın değerini verir.

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M ve $T_M(P)$ nin bir bazı, $\psi = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}\}$ olsun. M nin normal vektör alanı Z ve birim normal vektör alanı $N = \frac{Z}{\|Z\|}$ olmak üzere,

$$K(P) = \frac{1}{\|Z(P)\|^{n-1}} \cdot \frac{\det \begin{bmatrix} D_{Y_1} Z \\ \vdots \\ D_{Y_{n-1}} Z \\ Z(P) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Z(P) \end{bmatrix}}$$

dir.

Burada D, E^n deki konneksiyon (kovaryant türev) olur.

ispat//

$$\det\begin{bmatrix} DY_1 \\ \vdots \\ DY_{n-1} \\ Z(P) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} DY_1\, \|Z\|.N \\ \vdots \\ DY_{n-1}\, \|Z\|.N \\ \|Z\|.N \end{bmatrix} \qquad N = \frac{Z}{\|Z\|} \Rightarrow Z = N.\|Z\|$$

$$= \det\begin{bmatrix} (DY_1\, \|Z\|)\, N + \|Z\|\, DY_1\, N \\ \vdots \\ (DY_{n-1}\, \|Z\|)\, N + \|Z\|\, DY_{n-1}\, N \\ \|Z\|.N \end{bmatrix}$$

n. satırı $-\dfrac{DY_1\,\|Z\|}{\|Z\|}$ ile çarpıp 1. satıra eklersek,

$$= \det\begin{bmatrix} \|Z\|\, DY_1\, N \\ \vdots \\ \|Z\|\, DY_{n-1}\, N \\ \|Z\|.N \end{bmatrix}$$

(Benzer şekilde n. satırı $-\dfrac{DY_{n-1}\,\|Z\|}{\|Z\|}$ ile çarpıp (n-1). satıra eklersek)

$$= \|Z\|^{n-1} \det\begin{bmatrix} DY_1\, N \\ \vdots \\ DY_{n-1}\, N \\ \|Z\|\, N \end{bmatrix} = \|Z\|^{n-1} \det\begin{bmatrix} S(Y_1) \\ \vdots \\ S(Y_{n-1}) \\ Z(P) \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\tilde{S}} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} S(Y_1) \\ S(Y_2) \\ \vdots \\ S(Y_{n-1}) \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S(Y_1) \\ S(Y_2) \\ \vdots \\ S(Y_{n-1}) \\ Z(P) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Z(P) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix} DY_1 Z \\ \vdots \\ DY_{n-1} Z \\ Z(P) \end{bmatrix} = \|Z\|^{n-1} \det\left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Z(P) \end{bmatrix}$$

$$\|z\|^{n-1}\det\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ z(P)\end{bmatrix} = \|z\|^{n-1} K(P)\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ z(P)\end{bmatrix}$$

ispat //

$$\det\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \det S = K(P)$$

$$\Rightarrow K(P) = \frac{1}{\|z(P)\|^{n-1}} \frac{\det\begin{bmatrix} D_{Y_1}z \\ \vdots \\ D_{Y_{n-1}}z \\ z(P)\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ z(P)\end{bmatrix}} \quad \text{dir.} \quad //$$

Örnek // $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1\} \subset E^3$

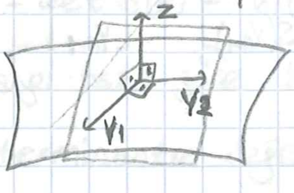
elipsoid yüzeyinin Gauss eğriliğini bulun.

$$f : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} - 1 = 0$$

$$K(P) = \frac{1}{\|z\|^2} \cdot \frac{\det\begin{bmatrix} D_{Y_1}z \\ D_{Y_2}z \\ z(P)\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ z(P)\end{bmatrix}}$$

$\{Y_1, Y_2\}$ $T_M(P)$ nin bazı ve z bir normal vektör olsun.

$$\nabla f = \left(2x_1, \frac{2x_2}{4}, \frac{2x_3}{9}\right) \Rightarrow z = \frac{\nabla f}{2} = \left(x_1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{9}\right) \text{ olsun.}$$



z ye dik ve lineer bağımsız olan Y_1 ve Y_2 lere bakalım.

$$Y_1|_P = \left(\frac{x_2}{4}, -x_1, 0\right)\Big|_P, \quad Y_2|_P = \left(\frac{x_3}{9}, 0, -x_1\right)\Big|_P \quad \text{alalım.}$$

$$N = \frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}}}\left(x_1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{9}\right)$$

$$z = (z_1, z_2, z_3) \Rightarrow z = \left(x_1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{9}\right) \text{ olur.}$$

$$D_{Y_1}z = \left(Y_1[z_1], Y_1[z_2], Y_1[z_3]\right) \text{ 'den } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix} DY_1 Z \\ DY_2 Z \\ Z\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} Y_1[z_1] & Y_1[z_2] & Y_1[z_3] \\ Y_2[z_1] & Y_2[z_2] & Y_2[z_3] \\ z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}$$ // teğeti

$$= \det\begin{bmatrix} \frac{x_2}{4} & -\frac{x_1}{4} & 0 \\ \frac{x_3}{9} & 0 & -\frac{x_1}{9} \\ x_1 & \frac{x_2}{4} & \frac{x_3}{9}\end{bmatrix} = \frac{x_1}{36}$$

- $Y_1[z_1] = \langle Y_1, \nabla z_1\rangle \qquad Y_1 = \left(\frac{x_2}{4}, -x_1, 0\right)$

  $\nabla z_1 = \nabla x_1 = (1,0,0) \Rightarrow Y_1[z_1] = \frac{x_2}{4}$ //

- $Y_1[z_2] = \langle Y_1, \nabla z_2\rangle \qquad \nabla z_2 = \frac{\nabla x_2}{4} = \left(0,\frac{1}{4},0\right)$

  $Y_1[z_2] = -\frac{x_1}{4}$

- $Y_1[z_3] = \langle Y_1, \nabla z_3\rangle \Rightarrow \nabla z_3 = \nabla \frac{x_3}{9} \Rightarrow Y_1[z_3] = \left(0, 0, -\frac{1}{9}\right)$

$$\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2}{4} & -x_1 & 0 \\ \frac{x_3}{9} & 0 & -x_1 \\ x_1 & \frac{x_2}{4} & \frac{x_3}{9}\end{vmatrix} = x_1\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}\right)$$

$$\|Z\|^2 = x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\|Z\|^2}\,\frac{\det\begin{bmatrix} DY_1 Z \\ DY_2 Z \\ Z\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z\end{bmatrix}} = \frac{1}{\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}\right)}\,\frac{\frac{x_1}{36}}{x_1\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}\right)}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{36\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}\right)^2}$$

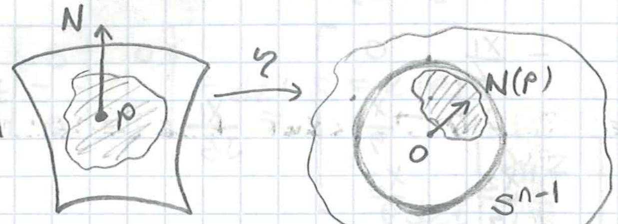
$$\Rightarrow K(P) = \frac{1}{36\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{81}\right)^2}\Bigg|_P \qquad //$$

İspat

Teorem : E^n de bir M hiperyüzeyinin bir P noktasındaki Gauss eğriliği, M nin p noktasındaki küresel resmi $\eta(P)$ deki hiper alan elementi ile M nin P deki hiper alan elementinin oranına eşittir.

İspat // $\eta : M \xrightarrow[\text{dön}]{\text{Gauss}} S^{n-1} \subset E^n$

$p \longrightarrow \eta(p) = N(p)$



η türev dönüşümü,

$$\eta_* : T_M(P) \longrightarrow T_{S^{n-1}}(\eta(P)) \quad \text{olur.}$$

$\eta_* = S$ (Gauss dönüşümünün türev dönüşümü, şekil operatörüne eşit idi.)

$T_M(P)$ nin bir bazı, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\} = \phi$ olsun.

Hiper alan (hacim) elementi $dV = \det[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}]$

($n-1$ boyutta alan, n boyutta hiperhacim olur.)

Küresel resmi ; $\{\eta_*(X_1), \eta_*(X_2), \ldots, \eta_*(X_{n-1})\}$ olsun.

$dV^* = \det[\eta_*(X_1), \eta_*(X_2), \ldots, \eta_*(X_{n-1})]$ yazılabilir.

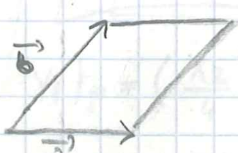
$dV^* = \det \eta_* \underbrace{\det[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}]}_{dV}$ $\left\{ \begin{array}{l} \eta_{1*} = SX_1 \\ \eta_{i*} = SX_i \end{array} \right.$ $\underbrace{\eta_* \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}}_{\det} = \underbrace{S \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}}_{\det}$

$\eta_* = S \Rightarrow dV^* = \underline{\det S}\, dV \Rightarrow dV^* = K\,dV$

$\Rightarrow K(P) = \dfrac{dV^*}{dV} = \dfrac{\text{hiperküresel alan elementi}}{\text{hiperyüzeyin alan elementi}}$

$n=3$ ise $\iint_B f(x,y)\,dA$, dA : alan elementidir.

$n=3$ ise $\iiint_W f(x,y,z)\,dV$, dV : hacim elementidir.



$S = \|a \wedge b\| = \det[\vec{a}, \vec{b}]$

$V = \det[a, b, c]$

25.5.96 / C.tesi

Tanım : (Ortalama Eğrilik) : E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longrightarrow H(P) = \text{iz}\, S(P)$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de, M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir.

Teorem: $H(P)$ ortalama eğriliği, $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

İspat// $T_M(P)$ nin iki bazı ϕ ve ψ olsun.

$$\phi = \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\} \text{ ve } \psi = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}\}$$

bazlarına göre S nin matrisleri, S_ϕ ve S_ψ olsunlar.

Lineer Cebir'den baz dönüşümü teoremine göre, öyle bir Q regüler matrisi vardır ki,

$$S_\psi = Q S_\phi Q^{-1}$$

olur. Ayrıca $iz(AB) = iz(BA)$ idi. Buna göre,

$$H_\psi = iz\, S_\psi = iz\, Q S_\phi Q^{-1} = iz\left[(Q S_\phi) Q^{-1}\right]$$
$$= iz\left[Q^{-1}(Q S_\phi)\right]$$
$$= iz\, S_\phi = H_\phi$$

(Baz ne olursa olsun, ortalama eğrilik değişmez.)

Sonuç: H, $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsız olduğundan, $\phi = \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ bazını $T_M(P)$ deki karakteristik (öz) vektörler olarak seçersek; $S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2, \dots$ $\dots, S(X_{n-1}) = k_{n-1} X_{n-1}$ alarak,

$$S.\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow S_\phi = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$H(P) = iz\, S_\phi = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

- Gauss eğriliği, asli eğriliklerin çarpımıdır.
- Ortalama " asli eğriliklerin toplamlarının, sayısına bölümüdür.

$$\left\{ H(P) = \frac{iz\, S_\phi}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P) \text{ alınır. (Bazen)} \right\}$$

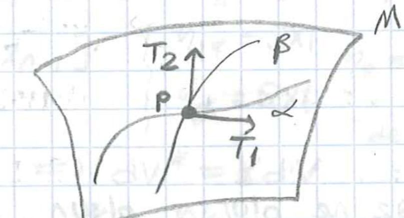
Tanım: (Eğrilik çizgileri = eğrileri) : E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet (T vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun.

Eğer α eğrisi boyunca T vektör alanı, S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa, α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir.

Sonuç: Tanıma göre α nın teğet vektör alanı bir karakteristik vektör olduğundan $S(T) = \lambda T$ bağıntısı $(\lambda \neq 0)$ eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemidir.

$$S(T) = D_T N = \boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = \lambda T} \text{ dif denk. (T bulunamayabilir.)}$$

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde herhangi bir noktadan geçen eğrilik çizgileri ortogonal bir eğri demeti oluştururlar.



İspat// $P \in M$ noktasında, iki eğrilik çizgisi α ve β olsun. T_1 ve T_2, α ve β nın P noktasındaki teğetleri olsun. T_1 ve T_2 vektörleri birer karakteristik vektörlerdir. Daha önceki teoremden, (farklı karakteristik vektörler dik olduğundan) dolayı $T_1 \perp T_2$ dir.

Örnek// $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ silindir yüzeyi için

a) k_1, k_2 asli eğriliklerini

b) K, H eğriliklerini bulun.

Çözüm a) $T_M(P)$ de bir bazı $\{X, Y\}$ alalım.

özel olarak, $X = \frac{\partial}{\partial x_3} \Rightarrow S(X) = 0 \Rightarrow S(X) = k_1 X \Rightarrow k_1 = 0$

$\langle Y, \overset{\text{dikey}}{\frac{\partial}{\partial x_3}} \rangle = 0$ alalım $\Rightarrow S(Y) = Y = k_2 Y \Rightarrow k_2 = 1$

b) $K = \det S = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k_1 k_2 = 0$, $H = iz(S) = 0 + 1 = 1$

İkinci metod : $f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1,x_2,x_3) \to f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \nabla f = (2x_1, 2x_2, 0) \qquad Z(P) = \frac{\nabla f}{2} = (x_1, x_2, 0)$

$\|Z(P)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$

$N(P) = \frac{Z(P)}{\underbrace{\|Z(P)\|}_{1}} = Z(P)$

$Y_1 = (0,0,1)\ ,\ Y_2 = (-x_2, x_1, 0)$

$$K = \frac{\det\begin{bmatrix} D_{Y_1}Z \\ D_{Y_2}Z \\ Z(P)\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z(P)\end{bmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0\end{vmatrix}} = \frac{0}{-(x_1^2+x_2^2)} = \frac{0}{-1} = 0 \ //$$

$D_{Y_1}Z = (Y_1[x_1], Y_1[x_2], Y_1[0])$

$\Rightarrow Y_1[x_1] = \langle Y_1, \nabla x_1\rangle = \langle (0,0,1), (1,0,0)\rangle = 0$

$Y_1[x_2] = \langle Y_1, \nabla x_2\rangle = \langle (0,0,1), (0,1,0) = 0$

Tanım: E^n de bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun.

i - $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $S = \lambda I_{n-1}$ ise $P \in M$ noktasına, M nin bir Umbilik noktası (Umbilic point = göbek noktası) denir.

ii - $S = 0$ ise (S sıfır dönüşümü ise) P noktasına M nin bir düzlemsel noktası (flat point) denir.

Örnek// Hiperkürenin tüm noktaları umbilik noktadır.

Hiperdüzlemin tüm noktaları birer düzlemsel noktadır.

İspat// a) $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - R^2 = 0$

$N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{1}{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$! MİNET

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olarak alınıyor.

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T_M(P)$ olmak üzere,

$S(Y) = D_Y N = D_Y \frac{1}{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$! MİNET

$= (Y[x_1], Y[x_2], \dots, Y[x_n])$

$\Rightarrow Y[x_1] = \langle Y, \nabla x_1 \rangle = \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (1, 0, \dots, 0) \rangle = y_1$

$\Rightarrow Y[x_2] = \langle Y, \nabla x_2 \rangle = \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (0, 1, 0, \dots, 0) \rangle = y_2$

$\vdots$

$= \frac{1}{R}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{R} Y$

$\forall Y \in T_M(P), \; S(Y) = \frac{1}{R} Y$

$\{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}$ $T_M(P)$ de bir baz olsun.

$S(U_1) = \frac{1}{R} U_1, \; S(U_2) = \frac{1}{R} U_2, \dots, S(U_{n-1}) = \frac{1}{R} U_{n-1}$

$$S \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/R & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1/R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/R & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/R \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow S = \frac{1}{R} I_{n-1}$ dir.

$\Rightarrow$ hiperkürenin tüm noktaları umbilik noktadır. //

ispat // b) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \Rightarrow F = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$

$\nabla F = (a_1, a_2, \dots, a_n), \; N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T_M(P)$ için,

$S(Y) = D_Y N = D_Y \frac{(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} = (0, 0, \dots, 0)$

$S(Y) = 0 \Rightarrow S \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S = 0$

$\Rightarrow$ hiperdüzlemin tüm noktaları birer düzlemsel noktadır.

1.6.96. / c. tesi.

Tanım: (Eşlenik Tanjant Vektörler):

E^n de bir hiperyüzey M ve $P \in M$ ve M nin şekil operatörü S olsun. $X_P, Y_P \in T_M(P)$ için $\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$ ise $(\langle S(Y_P), X_P \rangle = 0)$ X_P, Y_P tanjant vektörleri eşleniktirler denir.

Tanım: Bir $X_P \in T_M(P)$ için, $X_P \neq 0$ olmak üzere $\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$

ise X_p doğrultusuna M nin p noktasındaki bir asimptotik doğrultusu denir. X_p yi, $\forall p \in \alpha$ noktasında teğet kabul eden α eğrisine M üzerinde bir "asimptotik çizgi" denir.

Sonuç: M üzerinde bir α eğrisinin teğet vektörü T olsun. $X_p = T$ alınarak $\Rightarrow \langle S(X_p), Y_p \rangle = 0 \Rightarrow \langle S(T), T \rangle = 0$ bağıntısı M üzerindeki asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemi olur.

$$\Rightarrow T = \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{dir.}$$

Örnek// $X: E^2 \longrightarrow E^3$

$$(u,v) \longrightarrow X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, kv) \qquad (k = \text{sabit})$$

olan M yüzeyinin asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemini bulunuz.

Çözüm// Yüzeyin kartezyen denklemini,

$$P = X(u,v) = (X_1, X_2, X_3)$$

$$X_1(P) = u\cos v \qquad X_2(P) = u\sin v, \quad X_3 = kv$$

$$\Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \tan v \quad \Rightarrow X_3 = kv \Rightarrow \frac{X_3}{k} = v \quad \text{olur.}$$

$$z: \text{normal vektör alanı} \Rightarrow z = \vec{\nabla} F = \left(-\frac{X_2}{X_1^2}, \frac{1}{X_1}, \frac{\frac{1}{k}}{\cos^2 \frac{X_3}{k}} \right)$$

$$= \left(-\frac{X_2}{X_1^2}, \frac{1}{X_1}, -\frac{1}{k\cos^2 \frac{X_3}{k}} \right)$$

$N = \frac{z}{\|z\|} \Rightarrow z = \|z\| . N$ Eğer $\alpha: I \longrightarrow E^3$, $s \longrightarrow \alpha(s)$ eğrisi

s yay parametresi α eğrisi M üzerindeki bir asimptotik çizgi ise $\Rightarrow \langle S(T), T \rangle = 0$ olur. T, α nın birim teğet vektörü,

$$T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{olur.}$$

$$\langle S(T), T \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_T N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_T \frac{z}{\|z\|}, T \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle D_T \frac{1}{\|Z\|} Z, T \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle (D_T Z)\frac{1}{\|Z\|} + \left(D_T \frac{1}{\|Z\|}\right) Z, T \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle (D_T Z)\frac{1}{\|Z\|}, T \right\rangle + \left\langle T\left[\frac{1}{\|Z\|}\right] Z, T \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|Z\|} \langle D_T Z, T \rangle + \left(T\left[\frac{1}{\|Z\|}\right]\right) \underbrace{\langle Z, T \rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|Z\|} \langle D_T, Z \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_T Z, T \rangle = 0 \quad \text{olur.}$$

$Z = (z_1, z_2, z_3)$ ise

$$D_T Z = (T[z_1], T[z_2], T[z_3])$$

$$z_1 = -\frac{x_2}{x_1^2}, \quad T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$T[z_1] = \langle \nabla z_1, T \rangle = \left\langle \left(\frac{2x_2}{x_1^3}, -\frac{1}{x_1^2}, 0\right), (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right\rangle$$

$$T[z_2] = \frac{2x_2}{x_1^3}\xi_1 - \frac{1}{x_1^2}\xi_2$$

$$z_2 = \frac{1}{x_1}, \quad T[z_2] = \langle \nabla z_2, T \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{x_1^2}, 0, 0\right), (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{x_1^2}\xi_1$$

$$z_3 = -\frac{1}{k\cos^2\frac{x_3}{k}} \quad T[z_3] = \langle \nabla z, T \rangle$$

$$= \left\langle \left(0, 0, -\frac{1}{k}\frac{2\sin\frac{x_3}{k}\cos\frac{x_3}{k}\frac{1}{k}}{\cos^4\frac{x_3}{k}}\right), T \right\rangle$$

$$= -\frac{2\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{x_3}{k}}\xi_3$$

$$D_T Z = \left(\frac{2x_2}{x_1^3}\xi_1 - \frac{\xi_2}{x_1^2}, -\frac{\xi_1}{x_1^2}, -\frac{2\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{x_3}{k}}\xi_3\right)$$

$\Rightarrow \langle D_T Z, T \rangle = 0$ olduğundan

$$\Rightarrow \left(\frac{2x_2}{x_1^3}\cdot\xi_1 - \frac{\xi_2}{x_1^2}\right)\xi_1 - \frac{\xi_1}{x_1^2}\xi_2 - \frac{2\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{x_3}{k}}\xi_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x_2}{x_1}\xi_1^2 - 2\frac{\xi_2\xi_1}{x_1^2} - \frac{2\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{x_3}{k}}\xi_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1^2}\xi_1^2 - \frac{\xi_1\xi_2}{x_1^2} - \frac{\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{x_3}{k}}\xi_3^2 = 0$$

$\alpha(t) \in \alpha(I)$ noktası için

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big|_{\alpha(t)}$$

$$\vec{T} = \frac{d\alpha}{ds}\Big|_{\alpha(t)} = \alpha'(s) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')\Big|_{\alpha(t)}$$

$$\boxed{\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}(\alpha_1')^2 - \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_1^2} - \frac{\sin\frac{x_3}{k}}{k^2\cos^3\frac{\alpha_3}{k}}(\alpha_3')^2 = 0}$$

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. $k \neq 0$, $S(X) = kX$ ve $S(Y) = -kY$ olacak şekilde iki lineer bağımsız X ve Y vektör alanı için $X+Y$ ve $X-Y$ vektör alanlarının asimptotik olması için gerek ve yeter şart $X+Y$ ile $X-Y$ nin ortogonal olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: a) $X+Y$ asimptotik ise $\Rightarrow \langle S(X+Y), X+Y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle S(X)+S(Y), X+Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle kX - kY, X+Y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle k(X-Y), (X+Y)\rangle = 0 \Rightarrow k\langle X-Y, X+Y\rangle = 0$

$k \neq 0$ ve $\langle X-Y, X+Y\rangle = 0 \Rightarrow (X-Y) \perp (X+Y)$ //

b) $X-Y$ asimptotik ise $\Rightarrow \langle S(X-Y), X-Y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle S(X)-S(Y), X-Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle +kX + kY, X-Y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle k(X+Y), X-Y\rangle = 0 \Rightarrow k\langle X+Y, X-Y\rangle = 0$

$k \neq 0$ ve $\langle X+Y, X-Y\rangle = 0 \Rightarrow (X+Y) \perp (X-Y)$ //

$\Leftarrow$: a) Eğer $X-Y$, $X+Y$ dik ise $\Rightarrow \langle X-Y, X+Y\rangle = 0$

$S(X+Y) = S(X) + S(Y) = kX - kY = k(X-Y)$

$\Rightarrow k(X-Y) = S(X+Y) \Rightarrow (X-Y) = \frac{1}{k}S(X+Y)$

$\Rightarrow \langle \frac{1}{k}S(X+Y), (X+Y)\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{k}\langle S(X+Y), X+Y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle S(X+Y), X+Y\rangle = 0 \Rightarrow X+Y$ asimptotik doğrultudur.

Benzer şekilde,

$S(X-Y) = S(X) - S(Y) = kX - (-kY) = k(X+Y)$

$\Rightarrow k(X+Y) = S(X-Y) \Rightarrow (X+Y) = \frac{1}{k}S(X-Y)$

$\langle X-Y, X+Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle X-Y, \frac{1}{k}S(X-Y)\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle X-Y, S(X-Y) \rangle = 0 \Rightarrow \langle S(X-Y), X-Y \rangle = 0$

$\Rightarrow X-Y$ asimptotiktir.

Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. $X_P \in T_M(P)$ olmak üzere

i- X_P (nin)(aynı zamanda) hem asimptotik doğrultu ve hem de aslî doğrultu ise X_P tanjant vektörü $T_M(P)$ deki her tanjant vektöre eşleniktir.

ii- $X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörü $T_M(P)$ deki her tanjant vektöre eşlenik ise X_P bir asimptotik doğrultudur.

iii- $S(X_P) \neq 0$ ise X_P ye eşlenik olan doğrultular mutlaka vardır.

iv- II. temel form pozitif tanımlı (veya negatif tanımlı) ise hiçbir asimptotik doğrultu yoktur.

İspat // i- X_P bir asimptotik doğrultu ise $\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$,

X_P bir aslî doğrultu ise $S(X_P) = k X_P$

X_P hem asimtotik, hem de aslî doğrultu ise $\Rightarrow \langle k X_P, X_P \rangle = 0$

$\wedge\ k \neq 0 \Rightarrow k \langle X_P, X_P \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_P, X_P \rangle = 0 \Rightarrow \|X_P\| = 0$

$\Rightarrow X_P = 0 \Rightarrow S(X_P) = 0$

$\forall Y_P \in T_M(P)$ için, $\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle 0, Y_P \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle S(X_P), Y_P \rangle = 0 \Rightarrow X_P$ ve Y_P eşlenik doğrultulardır. //

ii- X_P her tanjant vektöre eşlenik olsun.

$\Rightarrow \forall Y_P \in T_M(P)$ için, $\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$ bu ifade $X_P = Y_P$ için de doğrudur. $\Rightarrow \langle S(X_P), X_P \rangle = 0 \Rightarrow X_P$ bir asimptotik doğrultudur.

iii- $S(X_P) \neq 0$ ise $S(X_P)$ ye ortogonal olan en az bir $Y_P \in T_M(P)$ vardır. $\Rightarrow \langle S(X_P), Y_P \rangle = 0 \Rightarrow X_P, Y_P$ eşleniktirler. //

iv- $X_P \in T_M(P)$ için $II(X_P, X_P) = \langle S(X_P), X_P \rangle > 0$

$\Rightarrow \langle S(X_P), X_P \rangle \neq 0$ olur.

$\Rightarrow$ asimptotik doğrultu yoktur.

{ Benzer şekilde $II(X_P, X_P) < 0$ ise asimptotik doğrultu yoktur. }

Hatırlatma : (Lineer Cebir)

Hamilton Cayley : Her karesel matris, karakteristik polinomunu sağlar. (bir köküdür.)

Örnek// $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$: $P_A(\lambda)=\det(\lambda I_2-A)$
karakteristik polinom.

$$=\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&2\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+1&-2\\-2&\lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2-A)=(\lambda+1)(\lambda-2)-4=\lambda^2-\lambda-6$$

$\Rightarrow P_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-6$

$P_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-6=0 \to \lambda_1=3,\ \lambda_2=-2$ özdeğerler (karakteristik değerler)

Karakteristik vektörler ise,

$(\lambda I_2-A)X=0$

$\lambda_1=3 \Rightarrow (3I_2-A)X=0 \to \left[\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$4x_1-2x_2=0$
$-2x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=2x_1$

$X=(x_1,x_2)=(x_1,2x_1)=(1,2)x_1$

$x_1=1$ alınırsa, $X=(1,2)$ $\lambda=3$ için matrisin özvektörüdür.

Benzer şekilde, $\lambda_2=3$ için bulunabilir.

$$P_A(A)=A^2-A-6I_2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$=\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

O halde teorem doğrulanmış olur. //

Teorem : E^3 de bir yüzey M, M üzerinde temel formlar; I, II, III; Gauss eğrilik fonksiyonu K ve ortalama eğrilik fonksiyonu H olsun. Bu taktirde, $III-HII+KI=0$ bağıntısı vardır.

İspat// $n=3$ için, $\text{boy}\,M=2=\text{boy}\,T_M(P)=\text{boy}\,\chi(M)$

S şekil operatörünün matrisi $S_{2\times 2}$ tipindedir.

Eğer k_1 ve k_2 aslî eğrilikler, X_1 ve X_2 aslî doğrultular ise

$S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2$ dir.

$X_1, X_2 \in T_M(P)$ tanjant vektörleri lineer bağımsız olsun.

$$S\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Rightarrow S \longleftrightarrow \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$ (şekil operatörünün matrisidir.)

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \qquad P_S(\lambda) = \det[\lambda I_2 - S]$$

$$\Rightarrow P_S(\lambda) = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - (k_1+k_2)\lambda + k_1 k_2$$

Hamilton-Cayley teoremine göre,

$$\Rightarrow P_S(S) = 0 \Rightarrow S^2 - (k_1+k_2)S + k_1k_2 I_2 = 0 \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (sıfır matris)

$\forall X_P \in T_M(P)$ için,

$$[S^2 - (k_1+k_2)S + k_1k_2 I_2](X_P) = O(X_P)$$

$$\Rightarrow S^2(X_P) - (k_1+k_2)S(X_P) + k_1k_2 X_P = 0 \qquad 0 = (0,0)$$ (sıfır vektör)

$\Rightarrow \forall Y_P \in T_M(P)$ için,

$$\langle S^2(X_P) - (k_1+k_2)S(X_P) + k_1k_2 X_P, Y_P \rangle = \langle 0, Y_P \rangle = 0 \quad (0 \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \langle S^2(X_P), Y_P \rangle - (k_1+k_2)\langle S(X_P), Y_P \rangle + k_1k_2 \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

$\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$,

$$I(X_P, Y_P) = \langle X_P, Y_P \rangle$$

$$II(X_P, Y_P) = \langle S(X_P), Y_P \rangle$$

$$III(X_P, Y_P) = \langle S^2(X_P), Y_P \rangle$$

$H(P) = \text{iz}\, S(P) = (k_1+k_2)(P)$ ortalama eğrilik.

$K = \det S = k_1 k_2$

$$III(X_P, Y_P) - H(P)\, II(X_P, Y_P) + K(P)\, I(X_P, Y_P) = 0$$

$$\Rightarrow (III - H\,II + K\,I)(X_P, Y_P) = O(X_P, Y_P)$$

$$\Rightarrow (III - H\,II + K\,I) = 0$$

II. esas formun özellikleri :

E^n de bir hiperyüzey M ve $P \in M$ olsun. M üzerindeki şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) $S : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$ verilsin. $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$ için ;

$I(X_P, Y_P) = \langle X_P, Y_P \rangle$ dir. (1. temel form)

$II(X_P, Y_P) = \langle S(X_P), Y_P \rangle$ dir. (2. temel form)

Teorem : II. temel form, M hiperyüzeyi üzerindeki yönlendirmeye bağlıdır.

İspat // a) $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$, $S(X_P) = D_{X_P} N$ olduğundan

$\Rightarrow II(X_P, Y_P) = \langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle D_{X_P} N, Y_P \rangle$

b) N yerine $-N$ alınırsa,

$II(X_P, Y_P) = \langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle D_{X_P}(-N), Y_P \rangle$
$= -\langle D_{X_P} N, Y_P \rangle$

Ödev : III. temel form hiperyüzeyin yönlendirilmesinden bağımsızdır.

Teorem : E^n de bir hiperyüzey M ve $\alpha : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. Bu taktirde $\forall P \in \alpha$ için,

$$\left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}\Big|_P , N_P \right\rangle = -II\left(\frac{d\alpha}{ds}\Big|_P , \frac{d\alpha}{ds}\Big|_P \right)$$

dir.

İspat // $\alpha = \alpha(s)$ için, s yay parametresi olsun.

$\Rightarrow P = \alpha(s_0)$, $X_P = \frac{d\alpha}{ds}(s_0) \in T_M(P)$ alalım.

$$S(X_P) = S\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = D_{X_P} N = D_{\frac{d\alpha}{ds}} N = \frac{d}{ds}\left(N(\alpha(s))\right)\Big|_{s=s_0}$$

Ayrıca, $\frac{d\alpha}{ds} \in T_M(\alpha(s)) \Rightarrow \left\langle \frac{d\alpha}{ds}\Big|_s , N(\alpha(s)) \right\rangle = 0$

Türev alırsak, $\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}\Big|_s , N(\alpha(s)) \right\rangle + \left\langle \frac{d\alpha}{ds}\Big|_s , \frac{d}{ds} N(\alpha(s)) \right\rangle =$

$\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}\Big|_s , N(\alpha(s)) \right\rangle + \langle X_P, S(X_P) \rangle = 0$

$\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}\Big|_s , N(\alpha(s)) \right\rangle = -\langle S(X_P), X_P \rangle = -II(X_P, X_P)$

$s = s_0$ için $\left.\frac{d\alpha}{ds}\right|_{s=s_0} = X_p$ olduğundan

$\Rightarrow \langle \alpha''(s_0), N_p \rangle = -\mathrm{II}(X_p, X_p)$ olur.

Sonuç: Eğer X_p bir asimptotik doğrultu ise

$\langle S(X_p), X_p \rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{II}(X_p, X_p) = 0$ dır.

(Asimptotik doğrultular için ikinci esas form sıfıra eşittir.)

Tanım: $\mathrm{II}(X_p, X_p)$ reel sayısına α eğrisinin $\left(X_p = \frac{d\alpha}{ds}\right)$ p noktasındaki normal eğriliği denir. Sembolik olarak,

$$k_n = \mathrm{II}(X_p, X_p) = \langle S(X_p), X_p \rangle$$

ile gösterilir.

Hatırlatma: $n=3$ halinde E^3 öklid uzayında bir yüzey M olsun.

$\alpha : I \xrightarrow{\text{dif.bilir}} M$ eğri olsun. α eğrisi için,

$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$, $\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{ds^2}$, $\alpha''' = \frac{d^3\alpha}{ds^3}$ olmak üzere $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$

lineer bağımsız ise Grahm-Schmith ortogonalizasyon metoduyla,

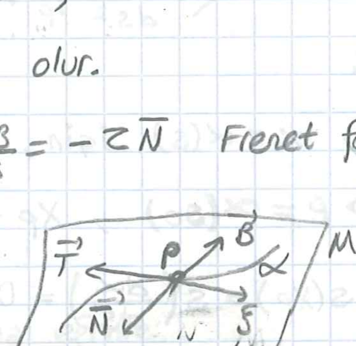
$V_1 = T = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'$ birim teğet vektörü,

$V_2 = \bar{N}$ birim asli normal vektörü,

$V_3 = B$ birim binormal vektörü olur.

$\frac{dT}{ds} = k\bar{N}$, $\frac{dN}{ds} = -kT + \tau B$, $\frac{dB}{ds} = -\tau \bar{N}$ Frenet formülleridir.

$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$, P noktasında Frenet üçlüsü.



$\langle T, \bar{N} \rangle = 0$ olduğundan,

$\langle N \wedge T \rangle = \xi$ olsun.

$\Rightarrow \{T, \xi, N\}$ de bir ortonormal bazdır?

(farklıların iç çarpımı sıfırdır, aynıların 1 dir.)

$\langle T, \xi \rangle = \langle T, N \wedge T \rangle = \det[T, N, T] = 0$

$\langle N, \xi \rangle = \langle N, N \wedge T \rangle = \det[N, N, T] = 0$

$$\|\xi\| = \|N\wedge T\| = \underbrace{\|N\|}_{1}.\underbrace{\|T\|}_{1}.\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = 1$$

Teorem : (Meusnier = Mönie Teoremi) : 8.6.96/C.tesl

Bir yüzeyin bir noktasından geçen ve aynı tegete sahip tüm eğrilerin eğrilik çemberleri bir küre (Meusnier küresi) üzerinde bulunurlar.

İspat // $n=3$ halinde ; M, E^3 de bir yüzey olsun. $P\in M$ noktasında, $\{T,\xi,N\}$ Gauss üçlüsü, $(\xi = N\wedge T)$ $\{T,N_1,B\}=\{V_1,V_2,V_3\}$ Frenet üçlüsü ve $\alpha: I \longrightarrow M$, $s \longrightarrow \alpha(s)$ yüzey üzerinde bir eğri olsun.

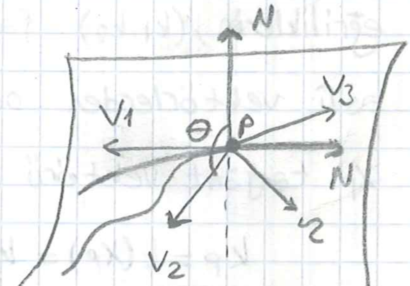
$$\frac{d\alpha}{ds} = V_1 = T \ , \ \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{dV_1}{ds} = \varkappa.V_2 = \varkappa.N_1$$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\alpha}{ds^2} = \varkappa N_1$ ifadesini N ile iç çarpım olarak çarpalım

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, N\right\rangle = \langle \varkappa N_1, N\rangle \Rightarrow \varkappa = \frac{\left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, N\right\rangle}{\langle V_2, N\rangle}$$

$-II\left(\dfrac{d\alpha}{ds}, \dfrac{d\alpha}{ds}\right) = \langle \alpha'', N\rangle$ idi.

$$\Rightarrow \varkappa = \frac{-II\left(\frac{d\alpha}{ds}\big|_p, \frac{d\alpha}{ds}\big|_p\right)}{\langle V_2, N\rangle\big|_p} \longrightarrow \text{2. temel form.}$$



$\sphericalangle(V_2, N) = \theta$ ise

$$\langle V_2, N\rangle\big|_p = \underbrace{\|V_2\|}_{1}.\underbrace{\|V_1\|}_{1}\cos\theta$$
$$= \cos\theta$$

Normal eğrilik $\Rightarrow$ $\varkappa_n = -II\left(\dfrac{d\alpha}{ds}, \dfrac{d\alpha}{ds}\right)$

$$\Rightarrow \varkappa = \frac{\varkappa_n}{\cos\theta}$$

$\varkappa_n = \varkappa\cos\theta \Rightarrow \dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{1}{\varkappa_n}\cos\theta \Rightarrow \dfrac{1}{\varkappa} = \rho$ eğrilik yarıçapı

$\dfrac{1}{\varkappa_n} = R_n$ normal eğrilik yarıçapı. $\Rightarrow \rho = R_n\cos\theta$

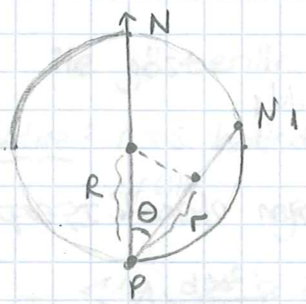
Eğer V_1 ve N den geçen P deki bir düzlem ile yüzeyi kesersek, yüzey üzerinde bir eğri elde edilir. Bu yüzeyin normal kesitidir. Bu eğrinin teğeti, öteki eğrinin teğeti ; aslî normali , yüzeyin normali olur.

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \kappa V_2 \Rightarrow \kappa = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, V_2 \right\rangle \text{ , eğrilik}$$

$$\kappa_n = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, N \right\rangle \text{ , normal kesitin eğriliği}$$

ρ : eğrinin eğrilik yarıçapı,

R_n : normal kesitin eğrilik yarıçapı $\boxed{\rho = R_n \cos\theta}$



Sonuç : $\rho = R_n \cos\theta$ bağıntısı, yarıçapı ρ olan çemberin, yarıçapı R_n olan küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

Meusnier küresi : $R_n = \dfrac{1}{\kappa_n}$ olan küredir.

(yarıçapı normal eğriliğe eşit olan küre.)

Teorem : (Yüzeyler İçin Euler Teoremi) :

E^3 de bir yüzey M ve $P \in M$ olsun. P noktasındaki aslî eğriliklerin, (k_1, k_2) farklı olduğunu kabul edelim. $T_M(P)$ nin aslî vektörlerden oluşan bir bazı $\{X_1, X_2\}$ ve herhangi bir X_P tanjant vektörü için ,

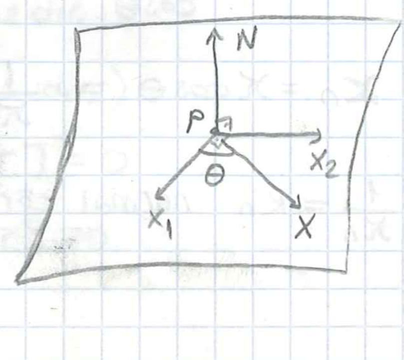
$$k_P = k(X_P) = k_1(P)\cos^2\theta + k_2(P)\sin^2\theta$$

bağıntısı vardır. Burada ; $k(P)$, X_P doğrultusundaki normal eğrilik; θ da, X_P ile birinci asli eğrilik arasındaki açıdır. $(\theta = \sphericalangle(X_P, X_1|_P))$

İspat // $\{X_1, X_2\}$ ortogonaldir.

$X_P = a_{11} X_1|_P + a_{12} X_2|_P$

X_P birim olsun.



$a_{11} = \langle X_P, X_1|_P \rangle = \overbrace{\|X_P\|}^{1} \cdot \overbrace{\|X_1|_P\|}^{1} \cos\theta = \cos\theta .$

$a_{12} = \langle X_P, X_2|_P \rangle = \|X_P\| \cdot \|X_2|_P\| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta .$

$X_P = X_1|_P \cos\theta + X_2|_P \sin\theta$ yazılır. Ayrıca M üzerinde şekil operatörünün matrisi, $S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ olsun. $\{X_1|_P, X_2|_P\}$ bazına göre.

$S(X_1) = k_1 X_1$

$S(X_2) = k_2 X_2$

$$
\begin{aligned}
S(X_P) &= S(X_1|_P \cos\theta + X_2|_P \sin\theta) \\
&= S(X_1|_P)\cos\theta + S(X_2|_P)\sin\theta \\
&= k_1|_P X_1|_P \cos\theta + k_2|_P X_2|_P \sin\theta
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow k(P) = \langle S(X_P), X_P \rangle$

$\Rightarrow k(P) = \langle k_1|_P X_1|_P \cos\theta + k_2|_P X_2|_P \sin\theta , X_1|_P \cos\theta + X_2|_P \sin\theta \rangle$

$\Rightarrow k(P) = k_1|_P \cos^2\theta + k_2|_P \sin^2\theta$

bulunur. Bu ise teoremin ispatıdır. //